Кинематическое построение

Задача 1. [МОШ 2025/26, 10 класс, задача 1] Плоский диск вращается вокруг своей оси симметрии, закреплённой вертикально. Точки A и B принадлежат этому диску. На рис. 1 изображены вектор ускорения точки A и вектор скорости точки B. Известно, что вектор ускорения точки B лежит на прямой, показанной на рис. 1 пунктиром.

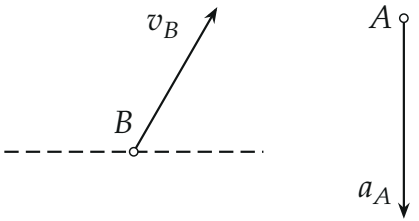


Рис. 1

1. С помощью циркуля и линейки постройте вектор скорости точки A и вектор ускорения точки B, кратко обосновав выполненное построение (описывать стандартные построения не требуется). При построении соблюдайте пропорциональность: длины отрезков, изображающих векторы (например, скорости), должны соотноситься на рисунке так же, как модули соответствующих физических величин.

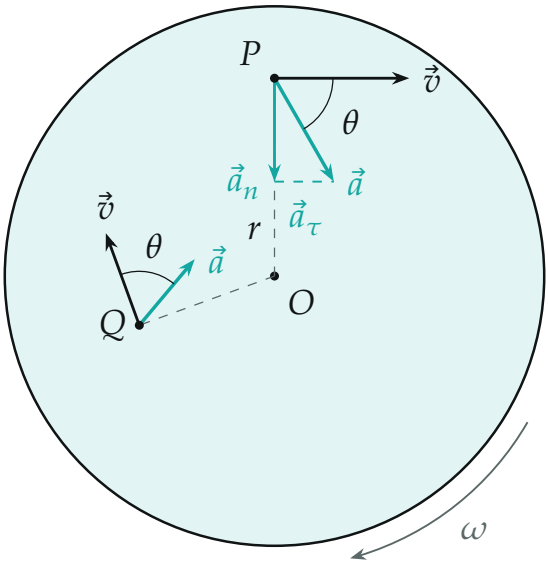
Построения в задачах 1 и 2 выполняются на выданном дополнительном листе, который необходимо сдать вместе с работой.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Ось диска вертикальна, сам диск горизонтален, и рис. 1 — вид на него сверху. Все точки диска движутся по окружностям вокруг одного центра O — точки, где ось пересекает диск. Где этот центр, нам не сказано; его и нужно найти. Главная идея задачи: картинка «скорость + ускорение» у всех точек диска одна и та же с точностью до поворота вокруг O и масштаба. Поэтому угол между $\vec{v}$ и $\vec{a}$ у всех точек одинаков, а длины векторов пропорциональны расстоянию до O.

Обозначения. O — центр вращения, r — расстояние от точки диска до O, ω — угловая скорость диска, ε — его угловое ускорение в этот момент, θ — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{a}$ одной точки.

1. Скорость и ускорение точки вращающегося диска. Точка на расстоянии r от оси движется по окружности. Её скорость направлена по касательной к окружности, то есть перпендикулярно радиусу, и $v = \omega r$. Ускорение складывается из двух частей: нормальной (центростремительной) $a_n = \omega^2 r$, направленной к O, и касательной $a_\tau = \varepsilon r$, направленной вдоль скорости, если вращение ускоряется, и против неё, если замедляется. Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}.$$



Скорость и ускорение двух точек диска: картинка одна и та же, только повёрнута и уменьшена; у точки P ускорение разложено на нормальную часть $\vec{a}_n$ и касательную $\vec{a}_\tau$ (пунктир)

Обе части ускорения, как и скорость, пропорциональны r, а их направления жёстко привязаны к радиусу. Поэтому

- угол θ от $\vec{v}$ до $\vec{a}$ одинаков у всех точек диска, причём одинаков и по величине, и по направлению отсчёта: при переходе от точки к точке вся картинка просто поворачивается вокруг O;
- $v \propto r$ и $a \propto r$, значит, для любых двух точек

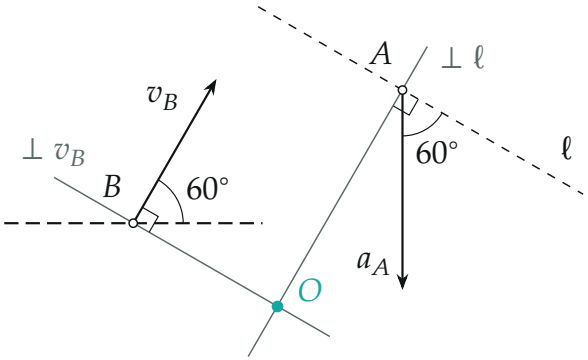
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{a_A}{a_B} = \frac{OA}{OB}.$$

2. Чем вращение отличается от равномерного. На рис. 1 прямая ускорения точки B не перпендикулярна $\vec{v}_B$: угол между ними равен 60° (или 120° — пока мы не знаем, в какую сторону вдоль пунктира смотрит $\vec{a}_B$). Значит, $a_\tau \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$: диск вращается неравномерно. При равномерном вращении ускорение было бы направлено точно к центру, под прямым углом к скорости.

3. Прямая, на которой лежит $\vec{v}_A$. Повернём прямую $\vec{v}_B$ к пунктиру: это поворот на 60° по часовой стрелке. По пункту 1 от прямой $\vec{v}_A$ к прямой $\vec{a}_A$ должен быть такой же поворот. Значит, прямая $\vec{v}_A$ получается из вертикальной прямой $\vec{a}_A$ поворотом на 60° *против* часовой стрелки. Все построения ниже — стандартные (перпендикуляр, угол, равный данному, параллельная прямая, перенос отрезка циркулем) и выполняются циркулем и линейкой без делений, ничего не измеряя. Строим прямую $\vec{v}_A$: переносим угол между $\vec{v}_B$ и пунктиром к точке A, откладывая его от прямой $\vec{a}_A$ (построение угла, равного данному, — стандартное). Получаем прямую ℓ через A под углом 30° к горизонтали, идущую вниз вправо.

Обратите внимание: угол надо переносить с тем же направлением отсчёта. Если отложить 60° в другую сторону, то у точек A и B поворот от $\vec{v}$ к $\vec{a}$ окажется разным, а у одного диска так быть не может.

4. Центр вращения. Скорость любой точки перпендикулярна радиусу, поэтому O лежит на перпендикуляре к $\vec{v}_B$, проведённом через B, и на перпендикуляре к прямой ℓ, проведённом через A. Строим оба перпендикуляра, O — точка их пересечения.



Шаги 3–4: прямая ℓ скорости точки A и центр вращения O

На чертеже условия получается $OB = 2$ см, $OA = 3$ см, то есть $OA : OB = 3 : 2$. Это видно и по построению: прямые OB и OA составляют с горизонталью углы 30° и 60°, и треугольник OAB прямоугольный.

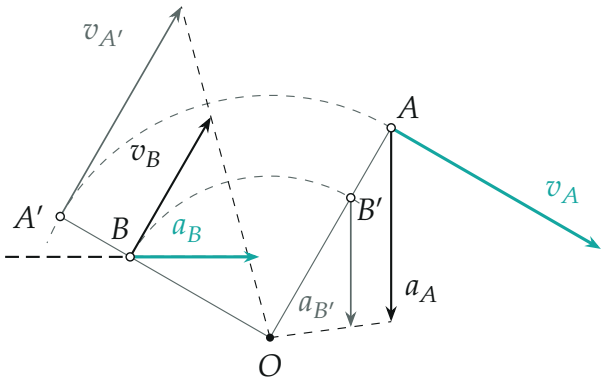
5. Направление вращения и направление $\vec{v}_A$. Точка O оказалась справа внизу от B, а $\vec{v}_B$ направлена вверх вправо. Значит, диск вращается по часовой стрелке. Точка A лежит над O справа, при вращении по часовой стрелке она движется вниз вправо — вдоль ℓ от точки A вниз. Проверим по ускорению: $\vec{a}_A$ имеет составляющую к центру O (центр ниже A) и составляющую вдоль $\vec{v}_A$ (обе смотрят вниз), то есть вращение ускоряется, $\varepsilon > 0$; с точки зрения логики всё верно.

6. Направление $\vec{a}_B$. Ускорение B лежит на пунктире и должно иметь составляющую к центру. Центр O правее B, поэтому $\vec{a}_B$ направлено по пунктиру вправо. Угол между $\vec{v}_B$ и $\vec{a}_B$ тогда равен 60° — острый, как и у точки A: вращение ускоряется, всё согласовано.

7. Длины векторов — через подобие. Векторы $\vec{v}$ у точек одного радиуса параллельны, а их концы лежат на одной прямой, проходящей через O: $v \propto r$. То же для $\vec{a}$. Отсюда построение без измерений линейкой.

- *Скорость A.* Циркулем с центром O переносим точку A на луч OB: получаем A', $OA' = OA$. Через A' проводим прямую, параллельную $\vec{v}_B$, и прямую через O и конец вектора $\vec{v}_B$. Их пересечение даёт конец вектора $\vec{v}_{A'}$, у которого $v_{A'} = v_B \cdot OA/OB$ (подобные треугольники с общей вершиной O). Циркулем откладываем эту длину от A вдоль ℓ вниз: это $\vec{v}_A$.

- *Ускорение B.* Так же переносим B на отрезок OA: точка B', $OB' = OB$. Через B' проводим прямую, параллельную $\vec{a}_A$, и прямую через O и конец $\vec{a}_A$; пересечение даёт $a_{B'} = a_A \cdot OB/OA$. Откладываем эту длину от B по пунктиру вправо: это $\vec{a}_B$.

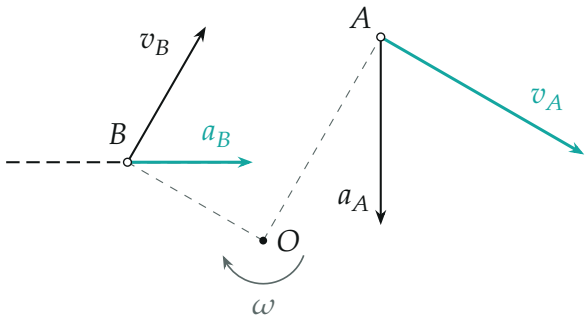


Шаг 7: длины v_A и a_B через подобие; ответ — бирюзовые векторы

8. Что получилось. По построению

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{a_B}{a_A} = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{3}.$$

Вектор $\vec{v}_A$ направлен вниз вправо под углом 30° к горизонтали и в полтора раза длиннее $\vec{v}_B$ (на чертеже условия 3 см против 2 см). Вектор $\vec{a}_B$ направлен по пунктиру вправо и составляет $\frac{2}{3}$ длины $\vec{a}_A$ (на чертеже 1,6 см против 2,4 см).



Ответ на рисунке условия: $v_A = \frac{3}{2} v_B$, $a_B = \frac{2}{3} a_A$, *вращение по часовой стрелке*

Проверка.

- Углы: $\vec{v}_A$ смотрит под $-30°$ к горизонтали, $\vec{a}_A$ — под $-90°$, поворот от $\vec{v}$ к $\vec{a}$ равен $60°$ по часовой стрелке; у точки B — от $60°$ к $0°$, тоже $60°$ по часовой.
- Ускорения обеих точек имеют составляющую к O и составляющую вдоль своей скорости; отношение касательной части к нормальной у обеих $\operatorname{ctg} 60°$, то есть $\varepsilon = \omega^2/\sqrt{3}$ для всего диска.
- Отношения v_A/v_B и a_A/a_B оба равны $OA/OB = 3/2$: модули растут с расстоянием до оси одинаково.

Физический смысл: у вращающегося твёрдого тела нет «своих» скоростей и ускорений у отдельных точек — всё задают две величины, ω и ε, и положение оси. Поэтому двух векторов и одной прямой хватает, чтобы восстановить картину движения всего диска.

Ответ. Центр вращения O — пересечение перпендикуляров к $\vec{v}_B$ в точке B и к прямой $\vec{v}_A$ в точке A; диск вращается по часовой стрелке с ускорением. Вектор $\vec{v}_A$ направлен вниз вправо под углом $30°$ к горизонтали (угол $60°$ с $\vec{a}_A$), $v_A = \frac{3}{2} v_B$; вектор $\vec{a}_B$ направлен по пунктиру вправо (в сторону O), $a_B = \frac{2}{3} a_A$.