Оптическое построение

Задача 1. [МОШ 2025/26, 10 класс, задача 2] На рис. 2 изображены три точки O, S_1 и S_2, лежащие на одной прямой. Точка O является оптическим центром *идеальной* собирающей линзы, а точки S_1 и S_2 — источником и его изображением в этой линзе. *Идеальной* называется тонкая линза, в которой любые лучи, в том числе идущие под большими углами к оптической оси, преломляются как параксиальные (приосевые).



Рис. 2

1. С помощью циркуля и линейки определите положение ближайшего к S_1 фокуса линзы в случае, когда прямая OS_1S_2 является её главной оптической осью.
2. Постройте геометрическое место точек (ГМТ), в которых может располагаться один из фокусов этой линзы, если положение её главной оптической оси в плоскости рисунка произвольно.

Кратко обоснуйте выполненные построения (стандартные построения обоснования не требуют).

▲ **Решение. Что происходит.** Источник S_1 и изображение S_2 лежат по одну сторону от линзы, причём изображение дальше от линзы, чем источник. Так работает лупа: источник ближе фокуса, изображение мнимое и увеличенное. Свет идёт от S_1 к линзе, то есть справа налево, а изображение S_2 получается на продолжениях преломлённых лучей назад. Фокус ищем стандартным приёмом: берём вспомогательную точку рядом с S_1, строим её изображение по лучу через центр и проводим луч, который после линзы идёт параллельно оси. Во втором пункте главная идея — для любой наклонной оси формула линзы остаётся той же, только все расстояния, измеренные вдоль оси, умножаются на $\cos\varphi$.

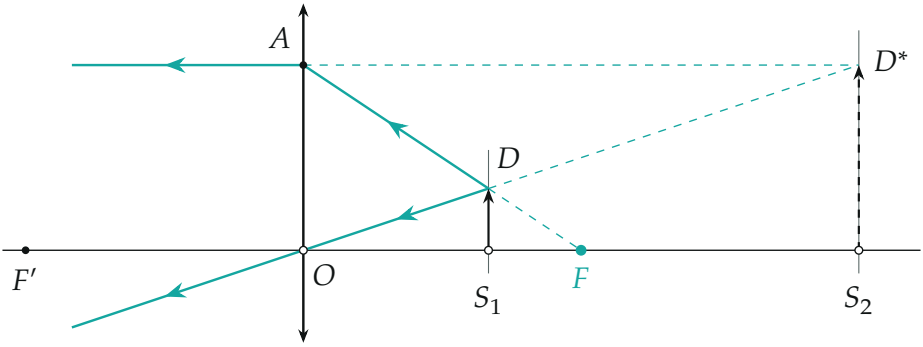
Обозначения. $a = OS_1$, $b = OS_2$, f — фокусное расстояние линзы, F — фокус со стороны S_1, F' — второй фокус. На чертеже условия $a = 2{,}4$ см, $b = 7{,}2$ см.

Пункт 1.

1. Где линза. Главная оптическая ось — прямая OS_1S_2, а тонкая линза перпендикулярна своей главной оси и проходит через оптический центр. Строим перпендикуляр к OS_1 в точке O — это плоскость линзы.

2. Вспомогательный предмет. Восстановим перпендикуляр к оси в точке S_1 и возьмём на нём любую точку D. Линза изображает плоскость, перпендикулярную оси, снова в плоскость, перпендикулярную оси, поэтому изображение D^* точки D лежит на перпендикуляре к оси в точке S_2. Кроме того, луч DO через оптический центр не преломляется, и D^* лежит на прямой OD. Значит, D^* — пересечение прямой OD с перпендикуляром в S_2.

3. Луч, который выходит параллельно оси. Через D^* проводим прямую, параллельную оси, до пересечения с линзой в точке A. Луч из D, попавший в A, после линзы идёт вдоль этой прямой: его продолжение назад обязано пройти через изображение D^*, а прямая через A и D^* параллельна оси. Луч, выходящий из линзы параллельно оси, до линзы шёл через передний фокус. Значит, прямая DA пересекает ось в фокусе F.



Построение фокуса: D^* — изображение вспомогательной точки D, луч DA выходит параллельно оси

4. Почему так — проверка формулой. Ход построения можно проверить расчётом. Для мнимого изображения формула тонкой линзы

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f=\frac{ab}{b-a}=\frac{2{,}4\cdot 7{,}2}{7{,}2-2{,}4}\ \text{см}=3{,}6\ \text{см}.$$

Фокусы — на расстоянии 3,6 см от O по обе стороны. Ближайший к S_1 — фокус F между S_1 и S_2, на 1,2 см правее S_1; второй, F', — в 6 см от S_1 по другую сторону линзы. На чертеже прямая DA проходит через $(2{,}4;\ 0{,}8)$ и $(0;\ 2{,}4)$ и пересекает ось ровно в $x = 3{,}6$ см. Высота точки D ни на что не влияет: от неё зависит только масштаб треугольников.

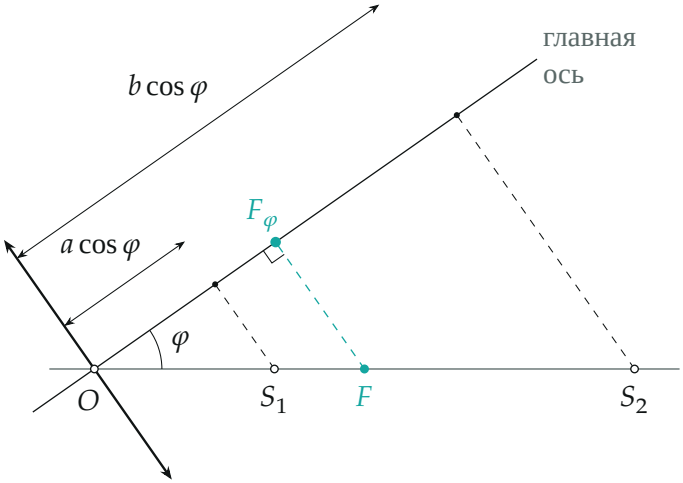
Обратите внимание: фокус F оказался *дальше* от линзы, чем источник. Так и должно быть: мнимое изображение у собирающей линзы получается, только если источник ближе фокуса.

Пункт 2.

5. Формула линзы для наклонной оси. Пусть главная ось проходит через O под углом φ к прямой OS_1S_2, а линза перпендикулярна ей. Точки S_1, O, S_2 по-прежнему на одной прямой: луч через оптический центр не преломляется. Расстояния от S_1 и S_2 до плоскости линзы, измеренные вдоль новой оси, равны $a\cos\varphi$ и $b\cos\varphi$. Линза идеальная, поэтому для точки вне оси работает та же формула, что для точки на оси, с этими расстояниями:

$$\frac{1}{a\cos\varphi} - \frac{1}{b\cos\varphi} = \frac{1}{f_\varphi} \quad \Rightarrow \quad f_\varphi = f\cos\varphi.$$

Обратите внимание: без слова «идеальная» так рассуждать нельзя — при большом φ точка S_1 далеко от оси, и лучи от неё к обычной линзе непараксиальные.

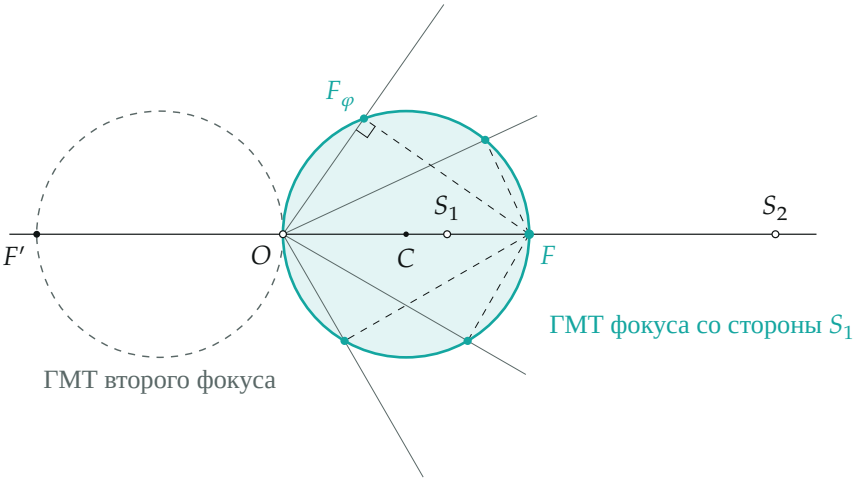


Наклонная ось: фокус F_φ — проекция точки F из пункта 1 на эту ось

6. Где фокус при наклонной оси. Фокус F_φ со стороны источника лежит на новой оси на расстоянии $OF_\varphi = f\cos\varphi = OF\cos\varphi$ от O. Но ровно на таком расстоянии от O находится проекция точки F на эту ось. Значит, F_φ — основание перпендикуляра, опущенного из F на ось, и $\angle OF_\varphi F = 90°$. Отрезок OF из любой точки F_φ виден под прямым углом, поэтому все такие точки лежат на окружности с диаметром OF. Наоборот, любая точка этой окружности, кроме O, — фокус для оси, проведённой через O и эту точку. Точка O выпадает: ей отвечает $\varphi = 90°$, когда $f_\varphi = 0$ и источник лежит в плоскости линзы.

7. Второй фокус. Второй фокус симметричен первому относительно O, поэтому он пробегает окружность с диаметром OF' — симметричную первой относительно точки O.

8. Построение. Делим отрезок OF пополам (серединный перпендикуляр), получаем центр C; проводим окружность с центром C радиуса $CO = \frac{f}{2} = 1{,}8$ см. Для второго фокуса так же строим окружность на OF'.



Ответ пункта 2: окружность с диаметром OF (без точки O); второй фокус — на симметричной окружности

Проверка.

- При $\varphi = 0$ из пункта 2 получаем $f_\varphi = f$ и $F_\varphi = F$ — точку пункта 1, она на окружности (конец диаметра).
- Размерность $f = ab/(b - a)$ — длина; при $b \to \infty$ (изображение уходит на бесконечность) $f \to a$: источник в фокусе, как и должно быть.
- На чертеже F_φ для $\varphi = 35°$: $OF_\varphi = 3{,}6 \cdot \cos 35° \approx 2{,}95$ см, а расстояние от центра C до этой точки 1,80 см — она на окружности.

Физический смысл: поворот оси не меняет оптическую силу идеальной линзы в пересчёте на «осевые» расстояния, а сами эти расстояния сокращаются в $\cos\varphi$ раз. Поэтому фокус движется так же, как проекция неподвижной точки F на вращающуюся прямую, — по окружности Фалеса.

Ответ. 1) Фокус F лежит на оси между S_1 и S_2: $OF = \dfrac{OS_1 \cdot OS_2}{OS_2 - OS_1} =$ 3,6 см, то есть на 1,2 см дальше S_1 от линзы (построение — на рисунке к пункту 1); 2) окружность с диаметром OF без точки O; второй фокус лежит на симметричной ей относительно O окружности с диаметром OF', где $OF' = OF$.