С общим эмиттером

Задача 1. [МОШ 2025/26, 10 класс, задача 3] Биполярный *npn*-транзистор — полупроводниковый прибор с тремя выводами: эмиттером, коллектором и базой. Эти выводы обозначены соответствующими буквами на схеме, приведённой на рис. 3, где показана схема упрощённого усилительного каскада на транзисторе. Эта схема предназначена для увеличения амплитуды сигнала, то есть переменной составляющей входного напряжения. Если на вход подаётся напряжение вида

$$U_{\text{вх}}(t) = U_{\text{б}} + U_1 \sin(\omega t),$$

где $U_{\text{б}}$ (напряжение смещения базы) и ω (круговая частота) — постоянные величины, а U_1 — амплитуда сигнала, то напряжение на высокоомной нагрузке $R_{\text{н}}$, подключённой к выходу (между эмиттером и коллектором), также содержит постоянную и переменную составляющие. При этом выходной сигнал имеет практически синусоидальную форму (искажения обычно не превышают нескольких процентов), а его амплитуда U_2 в несколько раз превышает амплитуду входного сигнала U_1.

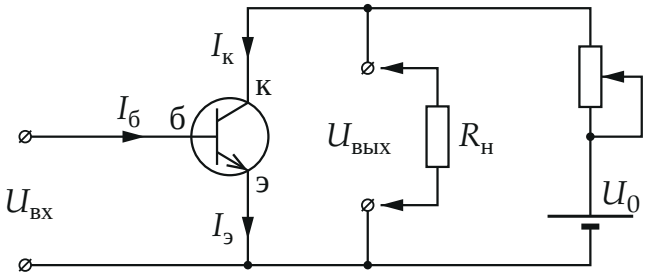


Рис. 3

Основной характеристикой усилительного каскада является коэффициент усиления по напряжению — модуль отношения амплитуд выходного и входного сигналов: $K_U = \left|\dfrac{U_2}{U_1}\right|$.

Пусть напряжение смещения базы и амплитуда входного сигнала равны соответственно $U_{\text{б}} = 0{,}7$ В и $U_1 = 0{,}2$ мВ.

Входная характеристика транзистора, то есть зависимость тока базы $I_б$ от напряжения между базой и эмиттером $U_{бэ}$, задаётся соотношением

$$I_б = I_{б0} \cdot 10^{\left(\frac{U_{бэ}}{U_T} - 12\right)}.$$

Здесь $U_T = 0{,}06$ В, $I_{б0} = 5$ мкА. Для наглядности на рис. 4 приведён график этой зависимости для напряжений, близких к напряжению смещения базы.

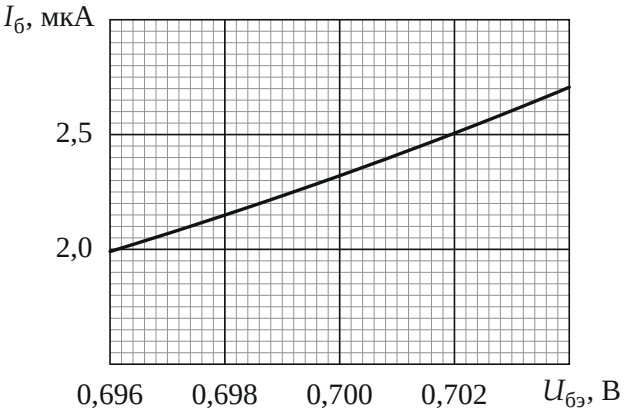


Рис. 4

Зависимость тока коллектора $I_к$ от напряжения между коллектором и эмиттером $U_{кэ}$ в рассматриваемой области токов и напряжений параметрически зависит от тока базы $I_б$ и описывается формулой

$$I_к = 200 \cdot I_б \left(1 + \frac{U_{кэ}}{U_A}\right),$$

где $U_A = 100$ В. Сопротивление реостата R в схеме на рис. 3 может изменяться от 1 кОм до 10 кОм, напряжение идеального источника $U_0 = 9$ В. Ток через нагрузку $R_н$ пренебрежимо мал по сравнению с током коллектора.

1. Определите для крайних значений сопротивления реостата ток коллектора $I_{к0}$ в отсутствие входного переменного сигнала ($U_1 = 0$).

2. Коэффициент усиления по току $K_I = I_к/I_б$ при заданных параметрах слабо зависит от тока базы. Определите K_I с точностью не хуже 1,0% при $R = 5$ кОм.
3. Какие значения может принимать коэффициент усиления по напряжению K_U? Укажите границы возможного диапазона с точностью не хуже 2,0%. В рамках данной модели такая точность достижима даже с учётом малых искажений выходного сигнала.

Примечание. Возможно (но не обязательно), при решении вам понадобится формула для производной функции $f(x) = 10^x$ в точке $x = x_0$: $(10^x)'|_{x=x_0} = \ln 10 \cdot 10^{x_0} \approx 2{,}302585 \cdot 10^{x_0}$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вход подключён между базой и эмиттером, поэтому $U_{бэ} = U_{вх}$, и ток базы идёт по входной характеристике. Ток коллектора примерно в 200 раз больше тока базы и течёт через реостат, на котором падает напряжение $I_к R$; остальное от U_0 достаётся транзистору, и это и есть выход: $U_{вых} = U_{кэ}$. Маленькое изменение входного напряжения чуть меняет ток базы, в 200 раз сильнее — ток коллектора, а умноженное на R — выходное напряжение. Главная идея задачи: сигнал мал, поэтому все зависимости можно заменить касательными в рабочей точке, но аккуратно — не забыв, что $I_к$ зависит ещё и от $U_{кэ}$, который сам меняется вместе с сигналом.

Обозначения. Черта сверху — значения в рабочей точке, без сигнала ($U_1 = 0$): $\bar{I}_б$, $I_{к0}$, $\bar{U}_{кэ}$. Для краткости $\beta = 200$ и

$$x = \frac{\beta \bar{I}_б R}{U_A}$$

— безразмерный параметр, который показывает, насколько заметен эффект зависимости $I_к$ от $U_{кэ}$.

Пункт 1.

1. Ток базы в рабочей точке. При $U_1 = 0$ имеем $U_{бэ} = U_б = 0{,}7$ В, и $U_б/U_T = 35/3$:

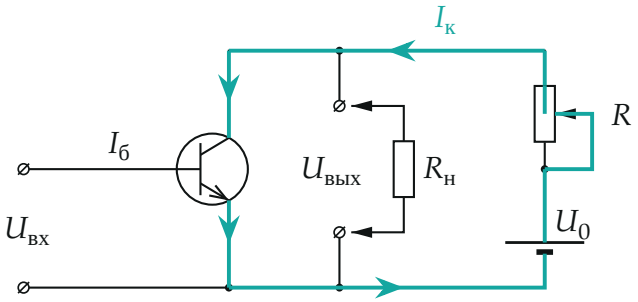
$$\bar{I}_б = I_{б0} \cdot 10^{35/3-12} = 5\ \text{мкА} \cdot 10^{-1/3} \approx 2{,}3208\ \text{мкА}.$$

С графиком рис. 4 это согласуется: при 0,700 В кривая проходит чуть

выше 2,3 мкА.

2. Второе правило Кирхгофа для контура «источник — реостат — коллектор — эмиттер». Ток через нагрузку мал, а ток базы замыкается через входной источник, поэтому через реостат течёт весь ток коллектора:

$$U_0 = I_к R + U_{кэ} \quad \Rightarrow \quad U_{вых} = U_{кэ} = U_0 - I_к R.$$



Ток коллектора замыкается через реостат и источник; на транзисторе остаётся $U_{кэ} = U_0 - I_к R$

3. Ток коллектора. Подставим $U_{кэ}$ в характеристику транзистора и решим линейное уравнение относительно $I_к$:

$$I_к = \beta I_б \left(1 + \frac{U_0 - I_к R}{U_A}\right) \quad \Rightarrow \quad I_к = \beta I_б \frac{1 + U_0/U_A}{1 + \beta I_б R/U_A}.$$

Здесь $\beta(1 + U_0/U_A) = 200 \cdot 1{,}09 = 218$. При $I_б = \bar{I}_б$ получаем $\beta\bar{I}_б(1 + U_0/U_A) = 505{,}93$ мкА и $\beta\bar{I}_б/U_A = 4{,}6416 \cdot 10^{-6}$ Ом$^{-1}$:

$$R = 1\text{ кОм}: \quad x = 0{,}00464, \quad I_{к0} = \frac{505{,}93}{1{,}00464}\text{ мкА} \approx 503{,}6\text{ мкА},$$

$$R = 10\text{ кОм}: \quad x = 0{,}0464, \quad I_{к0} = \frac{505{,}93}{1{,}0464}\text{ мкА} \approx 483{,}5\text{ мкА}.$$

Напряжения на транзисторе $\bar{U}_{кэ} = 8{,}50$ В и 4,17 В положительны: транзистор работает в той области, где верна формула для $I_к$.

Пункт 2.

4. Коэффициент усиления по току. Из пункта 3

$$K_I = \frac{I_к}{I_б} = \frac{218}{1 + \beta I_б R / U_A}.$$

При $R = 5$ кОм в рабочей точке $x = 0{,}02321$ и $K_I = 218/1{,}02321 \approx 213{,}1$.

5. Почему K_I от тока базы почти не зависит. Сигнал меняет ток базы на малую долю. По входной характеристике $I_б \propto 10^{U_{бэ}/U_T}$, поэтому

$$\frac{\Delta I_б}{I_б} = \ln 10 \cdot \frac{U_1}{U_T} = 2{,}3026 \cdot \frac{0{,}2\ \text{мВ}}{60\ \text{мВ}} \approx 0{,}77\%.$$

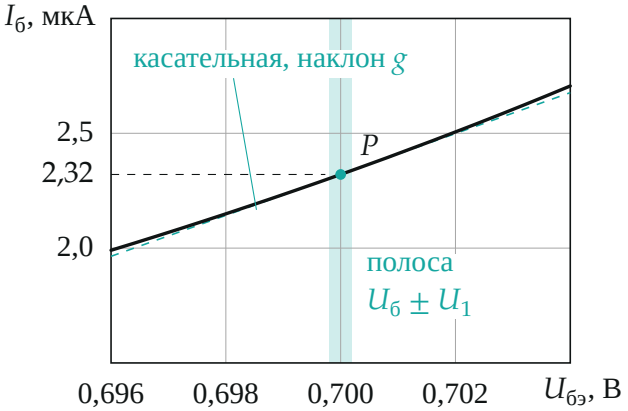
Относительное изменение K_I меньше в $\dfrac{x}{1+x} = 0{,}023$ раза, то есть около 0,02% — далеко за пределами требуемой точности 1%. Значит, $K_I \approx 213{,}1$ при любом мгновенном значении сигнала.

Пункт 3.

6. Линеаризация входной характеристики. Сигнал $U_1 = 0{,}2$ мВ много меньше масштаба $U_T / \ln 10 \approx 26$ мВ, на котором экспонента заметно искривляется. Поэтому малое изменение тока базы пропорционально малому изменению напряжения, коэффициент — производная в рабочей точке (крутизна):

$$g = \frac{dI_б}{dU_{бэ}} = \frac{\ln 10}{U_T} I_б = \frac{2{,}3026 \cdot 2{,}3208\ \text{мкА}}{0{,}06\ \text{В}} \approx 89{,}06\ \frac{\text{мкА}}{\text{В}},$$

$$\Delta I_б = g\, U_1 \sin \omega t.$$



Рабочая точка P на входной характеристике: сигнал занимает полосу шириной всего 0,4 мВ, и кривая на ней неотличима от касательной

7. Как меняется ток коллектора. Запишем изменения обеих частей уравнения пункта 3 (до его решения), учитывая, что вместе с током базы меняется и $U_{кэ} = U_0 - I_к R$:

$$\Delta I_к = \beta\left(1 + \frac{\bar{U}_{кэ}}{U_A}\right)\Delta I_б - \frac{\beta \bar{I}_б R}{U_A}\Delta I_к \quad \Rightarrow \quad \Delta I_к = \frac{K_I}{1+x}\Delta I_б,$$

где мы учли, что $\beta(1 + \bar{U}_{кэ}/U_A) = I_{к0}/\bar{I}_б = K_I$. Второе слагаемое справа — это эффект Эрли: выросший ток коллектора уменьшает $U_{кэ}$, а это немного «придерживает» ток коллектора.

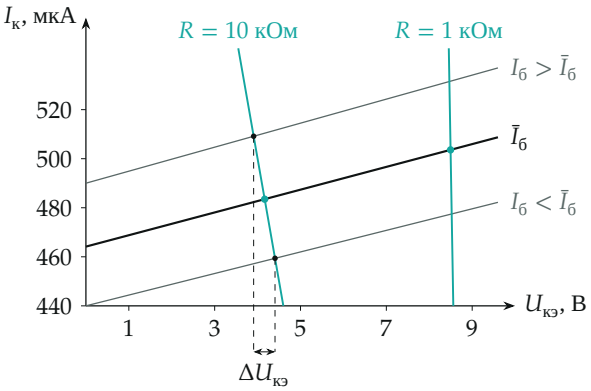
8. Коэффициент усиления. Выходное напряжение меняется на $\Delta U_{кэ} = -R\,\Delta I_к$ (минус: каскад переворачивает сигнал, но K_U — модуль). Соберём ответ:

$$U_2 = R\frac{K_I}{1+x}\,g\,U_1 \quad \Rightarrow \quad K_U = \frac{K_I\,g\,R}{1+x} = \frac{218\,gR}{(1+x)^2}.$$

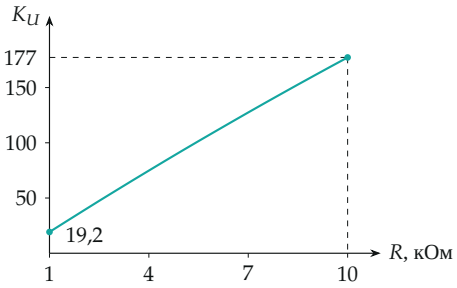
$$R = 1\text{ кОм}: \quad K_U = \frac{218 \cdot 89{,}06 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}{1{,}00464^2} \approx 19{,}24,$$

$$R = 10\text{ кОм}: \quad K_U = \frac{218 \cdot 89{,}06 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{1{,}0464^2} \approx 177{,}3.$$

Функция $R/(1+x)^2$ растёт, пока $x < 1$, то есть до $R \approx 215$ кОм; на отрезке от 1 до 10 кОм она монотонна, поэтому K_U принимает все значения между найденными.



Выходные характеристики при трёх токах базы (размах сигнала для наглядности сильно увеличен) и нагрузочные прямые $I_к = (U_0 - U_{кэ})/R$: чем положе прямая (больше R), тем больше размах $U_{кэ}$ при том же изменении тока базы



Коэффициент усиления по напряжению в зависимости от сопротивления реостата

Обратите внимание: в пункте 2 мы выяснили, что K_I почти постоянен, и хочется написать сразу $\Delta I_к = K_I\,\Delta I_б$. Это неверно на уровне требуемой точности: относительное изменение K_I крошечное, но и относительное изменение $I_б$ крошечное, а их отношение равно $x/(1+x)$, то есть 4,4%

при $R = 10$ кОм. Без множителя $1/(1+x)$ получилось бы $K_U \approx 185{,}5$ — на 4,6% больше верного, а именно такое значение стоит в критериях оценивания организаторов. При $R = 1$ кОм разница всего 0,5% (19,33 вместо 19,24).

9. Насколько точна линеаризация. Обозначим $\delta = \Delta I_б / \bar{I}_б \approx 0{,}77\%$ — относительную амплитуду тока базы. Кривизна экспоненты добавляет к току вторую гармонику с амплитудой около $\delta/4 \approx 0{,}2\%$ от первой, а саму первую гармонику меняет лишь на $\delta^2/8 \sim 10^{-5}$. Нелинейность связи $I_к(I_б)$ ещё в x раз слабее. Так что в этой модели выходной сигнал синусоидален с точностью лучше 1%, и K_U определяется линейной формулой с большим запасом по точности.

Проверка.

- Размерность: $[gR] = \dfrac{\text{А}}{\text{В}} \cdot \text{Ом} = 1$, K_U безразмерен.
- Второй способ — по крайним точкам, без производных. При $U_{бэ} = 0{,}7002$ В ток базы равен 2,33868 мкА, при 0,6998 В — 2,30305 мкА. По формуле пункта 3 при $R = 10$ кОм токи коллектора 487,05 и 479,96 мкА, так что $U_2 = \frac{1}{2} R\,\Delta I_к \approx 35{,}46$ мВ и $K_U = 177{,}3$; при $R = 1$ кОм — 507,46 и 499,76 мкА, $K_U = 19{,}24$. Совпадает с линейной формулой.
- Предел $U_A \to \infty$ (нет эффекта Эрли): $x \to 0$, $K_U \to \beta g R$ — обычная формула «усиление по току на крутизну и на сопротивление».

Физический смысл: транзистор превращает малое изменение входного напряжения в изменение тока коллектора с крутизной $\beta g \approx 18$ мА/В, а реостат переводит этот ток обратно в напряжение. Чем больше R, тем больше усиление, но тем сильнее и обратное влияние выхода на транзистор через $U_{кэ}$ — оно и даёт множитель $1/(1+x)^2$.

Ответ. 1) $I_{к0} \approx 503{,}6$ мкА при $R = 1$ кОм и $I_{к0} \approx 483{,}5$ мкА при $R = 10$ кОм; 2) $K_I \approx 213{,}1$; 3) $K_U = 218\,gR/(1+x)^2$, где $g = \ln 10 \cdot \bar{I}_б / U_T$, $x = 200\,\bar{I}_б R / U_A$, $\bar{I}_б \approx 2{,}321$ мкА: от $K_U \approx 19{,}2$ (при $R = 1$ кОм) до $K_U \approx 177$ (при $R = 10$ кОм).