О бусинке и грузе

Задача 1. [МОШ 2025/26, 10 класс, задача 4] На гладкое проволочное кольцо радиуса R, закреплённое в вертикальной плоскости, насажена маленькая массивная бусинка массой m. К бусинке прикреплён один конец тонкой нерастяжимой невесомой нити (см. рис. 5). Другой её конец пропущен через маленький идеальный блок и прикреплён к грузу массой km, где k — постоянный коэффициент. Блок закреплён в точке, лежащей на горизонтальном диаметре кольца. Положение бусинки на кольце характеризуется углом φ между направлениями на блок и на бусинку из центра кольца.

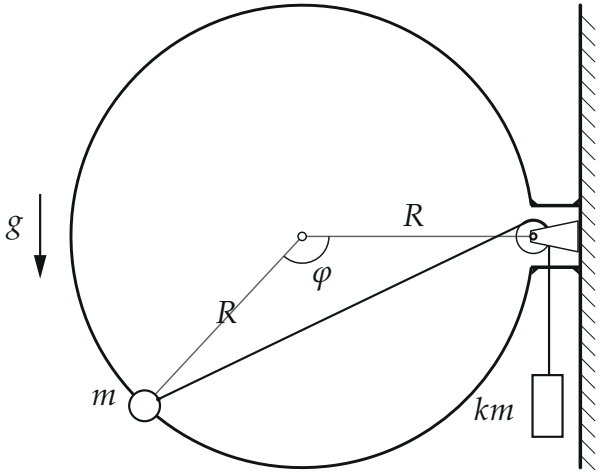


Рис. 5

1. Пусть $k = 1/\sqrt{3}$. Определите угол (или углы), соответствующий положению равновесия бусинки.

В начальный момент времени бусинке, находящейся в положении устойчивого равновесия, сообщают ударом скорость v, направленную вдоль кольца в сторону от блока. При каком минимальном значении скорости $v = v_{\min}$ бусинка сможет достичь блока, двигаясь всё время в одну сторону (по часовой стрелке)?

2. При каких значениях параметра k на кольце отсутствуют точки, в которых бусинка могла бы находиться в состоянии устойчивого равновесия?
3. Пусть теперь между бусинкой и проволокой есть трение, а коэффициент трения зависит от угла как $\mu = \operatorname{tg}(\varphi/2)$. Существует ли для случая равных масс ($k = 1$) положение устойчивого равновесия, при котором $\varphi \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$? Найдите это положение (или положения) или докажите, что их не существует.

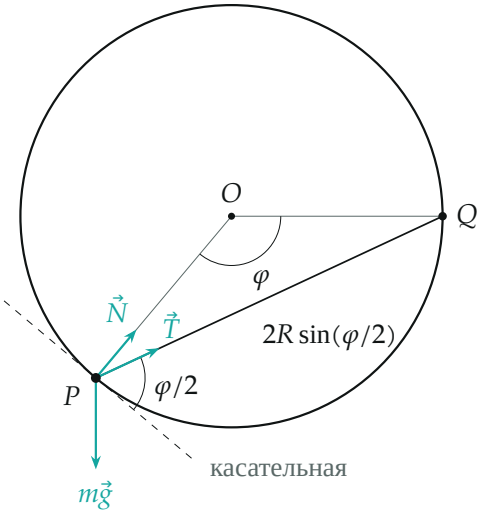
Размерами крепления кольца, блока, бусинки и груза можно пренебречь. Нить достаточно длинна, так что груз не сталкивается с блоком при движении бусинки. На рис. 5 пропорции изменены для наглядности. Ускорение свободного падения равно g.

▲ **Решение. Что происходит.** Бусинку тянут две силы: тяжесть вниз и нить к блоку (натяжение нити в покое равно весу груза kmg). Кольцо гладкое, поэтому оно действует на бусинку только по радиусу и не мешает ей сдвигаться вдоль кольца. Удобнее всего следить за потенциальной энергией системы «бусинка + груз» как функцией одного угла φ: равновесия — её экстремумы, устойчивое — минимум, а чтобы бусинка дошла до блока, её кинетической энергии должно хватить на подъём через самый высокий «горб» этой энергии.

Обозначения. O — центр кольца, Q — блок, P — бусинка; угол φ отсчитываем от направления OQ по часовой стрелке (вниз), $0 < \varphi < 2\pi$. Высоты — от горизонтального диаметра, вверх. $W(\varphi)$ — потенциальная энергия системы.

Пункт 1.

1. Геометрия. Треугольник OPQ равнобедренный ($OP = OQ = R$) с углом φ при вершине, поэтому длина нити от бусинки до блока $PQ = 2R\sin\dfrac{\varphi}{2}$, а углы при основании равны $90^\circ - \dfrac{\varphi}{2}$. Касательная к окружности в точке P перпендикулярна радиусу OP, значит, нить составляет с касательной угол $\dfrac{\varphi}{2}$. Высота бусинки $y = -R\sin\varphi$.



Силы на бусинку и геометрия: нить PQ образует с касательной угол $\varphi/2$

2. Потенциальная энергия системы. Нить нерастяжима: на сколько удлиняется отрезок PQ, на столько укорачивается отрезок от блока до груза, и груз поднимается на эту же величину. Поэтому, с точностью до постоянной,

$$W(\varphi) = mg\,y + kmg \cdot PQ = mgR\left(2k\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right).$$

Силы, которые работы не совершают (кольцо — по нормали к скорости, блок идеальный), в W не входят.

3. Положения равновесия. Это точки, где $dW/d\varphi = 0$:

$$\frac{dW}{d\varphi} = mgR\left(k\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right) = 0.$$

То же даёт второй закон Ньютона для бусинки в проекции на касательную: $mg\cos\varphi = T\cos(\varphi/2)$, где $T = kmg$. Обозначим $c = \cos(\varphi/2)$; так как $\cos\varphi = 2c^2 - 1$, получаем квадратное уравнение

$$2c^2 - kc - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad c_{\pm} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+8}}{4}.$$

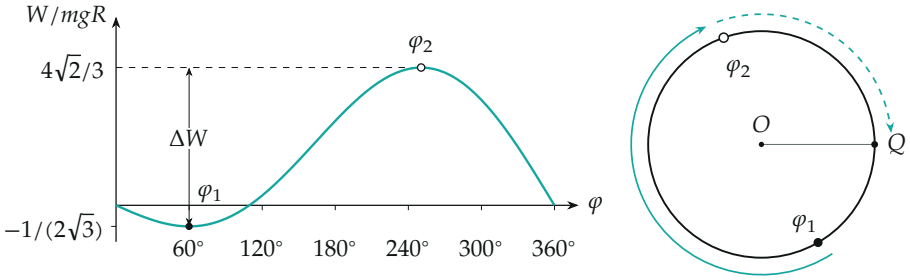
При $k = 1/\sqrt{3}$ имеем $\sqrt{k^2+8} = 5/\sqrt{3}$, и $c_+ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c_- = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\varphi_1 = 60^\circ, \qquad \varphi_2 = 2\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 250{,}5^\circ.$$

4. Какое из них устойчиво. Вторая производная

$$\frac{d^2W}{d\varphi^2} = mgR\left(\sin\varphi - \frac{k}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = mgR\sin\frac{\varphi}{2}\left(2c - \frac{k}{2}\right).$$

При $0 < \varphi < 2\pi$ множитель $\sin\dfrac{\varphi}{2} > 0$, поэтому минимум (устойчивость) — там, где $c > k/4$. Корень c_+ этому условию удовлетворяет всегда, $c_- < 0$ — никогда. Значит, $\varphi_1 = 60^\circ$ — устойчивое равновесие (бусинка внизу справа, ниже блока), $\varphi_2 \approx 250{,}5^\circ$ — неустойчивое (вверху слева).



Слева: потенциальная энергия при $k = 1/\sqrt{3}$ — яма в $\varphi_1 = 60^\circ$ и горб в $\varphi_2 \approx 250{,}5^\circ$. Справа: путь бусинки от φ_1 по часовой стрелке через верхнее положение неустойчивого равновесия к блоку

5. Связь скоростей бусинки и груза. Скорость груза u равна скорости изменения длины PQ: $u = \dfrac{d}{dt}\left(2R\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) = R\cos\dfrac{\varphi}{2}\cdot\dot\varphi$. Скорость бусинки $v = R\dot\varphi$, поэтому

$$u = v\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Это проекция скорости бусинки на нить: нить нерастяжима, и вдоль неё бусинка и груз движутся одинаково.

6. Через какой горб нужно перевалить. От $\varphi_1 = 60°$ по часовой стрелке до блока ($\varphi = 360°$) энергия W сначала растёт до максимума в φ_2, а потом убывает до $W(360°) = 0$. Значит, достаточно, чтобы бусинка дошла до φ_2 с ненулевой скоростью; минимальная скорость удара — та, при которой скорость в φ_2 обращается в ноль. Удар короткий, и после него груз сразу движется со скоростью $u_1 = v\cos 30°$.

7. Закон сохранения энергии системы «бусинка + груз» от момента после удара до точки φ_2. Трения нет, нить и блок идеальные:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} + \frac{km\,(v_{\min}\cos 30°)^2}{2} + W(\varphi_1) = W(\varphi_2).$$

Значения энергии: $W(\varphi_1) = mgR\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{mgR}{2\sqrt{3}}$, а в φ_2, где $\sin\frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sin\varphi_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, получаем $W(\varphi_2) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,mgR$. Тогда $\Delta W = W(\varphi_2) - W(\varphi_1) \approx 2{,}174\,mgR$ и

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\Delta W/m}{1 + k\cos^2 30°}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}174}{1+\sqrt{3}/4}\,gR} \approx 1{,}74\sqrt{gR}.$$

Обратите внимание: этот расчёт, как и задумано в задаче, считает нить всё время натянутой. Натяжение при движении $T = km\,(g + a_{\text{гр}})$, где $a_{\text{гр}}$ — ускорение груза вверх. При $v \approx v_{\min}$ быстро бегущая бусинка «требует», чтобы взлетевший груз тормозил быстрее g (около $\varphi \approx 85°$ и дальше), а так нить тянуть не может — она провисает. Строгий ответ тогда зависит от того, как нить снова натянется; при неупругом рывке численный расчёт даёт $v_{\min} \approx 1{,}84\sqrt{gR}$.

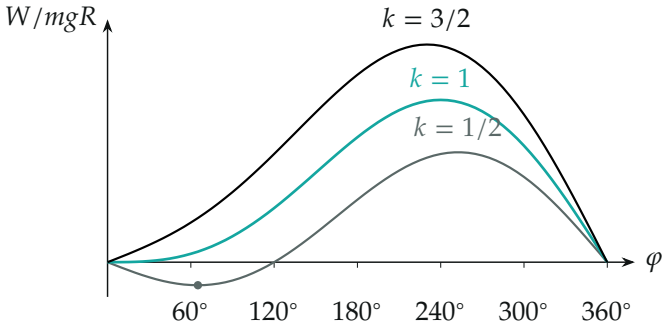
Пункт 2.

8. Когда устойчивых положений нет. По пункту 4 устойчивое равновесие может дать только корень $c_+ = \frac{k + \sqrt{k^2+8}}{4}$, и он должен быть косинусом настоящего угла: $c_+ < 1$ (при $c_+ = 1$ угол $\varphi = 0$ — это сам

блок). Решаем:

$$k + \sqrt{k^2 + 8} < 4 \;\Leftrightarrow\; k^2 + 8 < 16 - 8k + k^2 \;\Leftrightarrow\; k < 1.$$

Значит, при $k \geqslant 1$ устойчивых положений на кольце нет; остаётся только неустойчивое c_-, которое есть при любом k. В критериях организаторов ответ записан как $k > 1$: разница только в граничном значении $k = 1$, при котором яма сливается с точкой блока. Физический смысл: груз тяжелее бусинки, и даже внизу кольца нить перетягивает её к блоку.



$W(\varphi)$ при трёх значениях k: яма есть только при $k < 1$; при $k = 1$ она сжимается в точку блока $\varphi = 0$

Пункт 3.

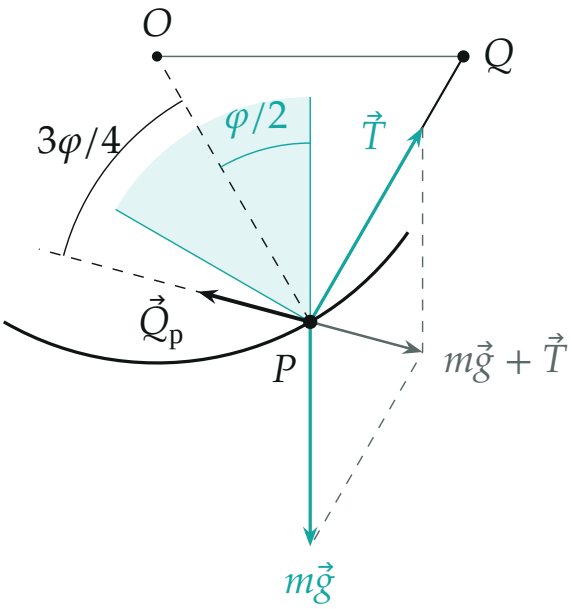
9. Условие покоя с трением. Теперь бусинка может покоиться и там, где тангенциальная сила не равна нулю, — если её удержит трение покоя: $|F_{\text{тр}}| \leqslant \mu N$. Удобнее рассуждать через полную силу реакции кольца $\vec{Q}_{\text{р}} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$: в покое она уравновешивает $m\vec{g} + \vec{T}$, а отклоняться от радиуса она может не больше чем на угол трения α, где $\operatorname{tg}\alpha = \mu$. По условию $\mu = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, то есть $\alpha = \dfrac{\varphi}{2}$.

10. Куда направлена сумма $m\vec{g} + \vec{T}$ при $k = 1$. Модули равны ($T = mg$), поэтому сумма направлена по биссектрисе угла между ними. Сила тяжести смотрит под углом $-90°$ к горизонтали, нить — под углом $90° - \dfrac{\varphi}{2}$ (пункт 1). Биссектриса — под углом $-\dfrac{\varphi}{4}$. Реакция кольца должна быть направлена противоположно, под углом $180° - \dfrac{\varphi}{4}$. А радиус в

точке бусинки (к центру) направлен под углом $180^\circ - \varphi$. Угол между реакцией и радиусом

$$\left(180^\circ - \frac{\varphi}{4}\right) - (180^\circ - \varphi) = \frac{3\varphi}{4} > \frac{\varphi}{2} = \alpha.$$

При $\varphi \in (0;\, \pi/2)$ это угол меньше 90°, так что сравнение честное: требуемая реакция всегда выходит из конуса трения, и бусинка соскальзывает.



Пункт 3 при $\varphi = 60^\circ$: требуемая реакция $\vec{Q}_p$ отклонена от радиуса на $3\varphi/4 = 45^\circ$, а конус трения (бирюзовый) — только на $\varphi/2 = 30^\circ$

11. То же в силах. Проверим алгеброй. Тангенциальная сила (к блоку) $F_t = mg\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right) = mg(1-c)(1+2c)$, нормальная реакция из уравнения по радиусу $N = mg\sin\frac{\varphi}{2}(2c-1)$, где $c = \cos\frac{\varphi}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Условие $F_t \leqslant \mu N = \frac{1-c^2}{c}(2c-1)\,mg$ после сокращения на $mg(1-c) >$

0 принимает вид

$$c(1+2c) \leqslant (1+c)(2c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant -1,$$

что неверно ни при каком φ. Значит, в интервале $(0;\, \pi/2)$ нет не только устойчивых, но и вообще никаких положений равновесия.

Проверка.

- Пункт 1: при $\varphi_1 = 60^\circ$ проекции на касательную $mg\cos 60^\circ = \frac{1}{2}mg$ и $T\cos 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{1}{2}mg$ — равны. Размерность $v_{\min}$: $\sqrt{gR}$ — скорость.
- Предел $k \to 0$ (нити нет): $c_+ \to 1/\sqrt{2}$, $\varphi \to 90^\circ$ — бусинка внизу кольца, как и должно быть.
- Пункт 3: отношение F_t/N равно $\operatorname{tg}\dfrac{3\varphi}{4}$ (например, при $\varphi = 60^\circ$ получается $F_t/N = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ$), что совпадает с геометрическим рассуждением.

Физический смысл: при равных массах сила нити и сила тяжести складываются в силу, которая направлена почти по касательной к кольцу, а трение с «подогнанным» коэффициентом $\operatorname{tg}(\varphi/2)$ удерживает лишь отклонение на $\varphi/2$ — на четверть φ меньше, чем нужно, при любом φ.

Ответ. 1) $\varphi_1 = 60^\circ$ (устойчивое), $\varphi_2 = 2\arccos(-1/\sqrt{3}) \approx 250{,}5^\circ$ (неустойчивое); $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2gR\,(4\sqrt{2}/3 + \sqrt{3}/6)}{1+\sqrt{3}/4}} \approx 1{,}74\sqrt{gR}$ (если нить всё время натянута); 2) при $k \geqslant 1$; 3) не существует: при $k = 1$ и $\varphi \in (0;\, \pi/2)$ трение не может удержать бусинку ни в какой точке.