В потоке

Задача 1. [МОШ 2025/26, 10 класс, задача 5] В задаче рассматривается эффект конденсации водяного пара в областях пониженного давления, возникающих при обтекании препятствий потоком влажного воздуха. Вследствие этого эффекта вблизи задней кромки крыльев и вдоль фюзеляжа самолёта может возникать так называемый «паровой конус».

Далее рассматривается стационарное адиабатическое течение невязкого идеального газа. Это подразумевает, что параметры потока в каждой точке неизменны во времени, теплообмен отсутствует, а внутренним трением можно пренебречь.

Числом Маха $\mathrm{M} = \dfrac{v}{c}$ называется отношение скорости потока v в некоторой точке к скорости звука c в той же точке. Скорость звука определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

Воздух считайте идеальным газом с показателем адиабаты $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = \dfrac{7}{5}$ и молярной массой $\mu = 29$ г/моль. Адиабатический процесс описывается уравнением $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$, где P — давление, а ρ — плотность.

Также считайте известным соотношение, выражающее закон сохранения энергии для стационарного потока (уравнение Бернулли для сжимаемого газа):

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_P T}{\mu} = \text{const}.$$

1. Самолёт летит в воздухе с температурой $T_0 = 295$ К и давлением $P_0 = 101{,}325$ кПа. В системе отсчёта самолёта скорость набегающего потока вдали от него соответствует числу Маха $\mathrm{M}_0 = 0{,}35$. При обтекании крыльев и некоторых частей фюзеляжа скорость воздуха увеличивается, достигая максимального значения, соответствующего $\mathrm{M}_{\max} = 0{,}5$.

   При каком максимальном значении относительной влажности $\varphi_{\max}$ окружающего воздуха образование парового конуса

невозможно? Зависимость давления насыщенного пара воды от температуры представлена на рис. 6.

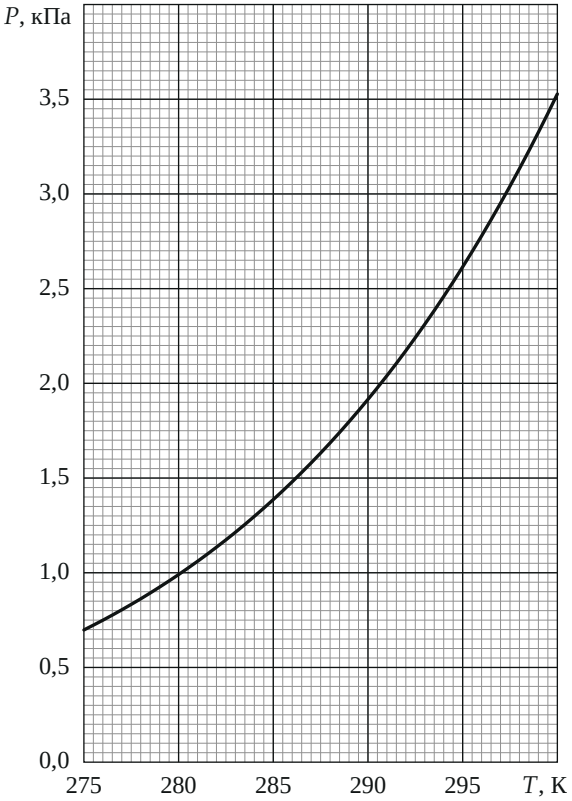
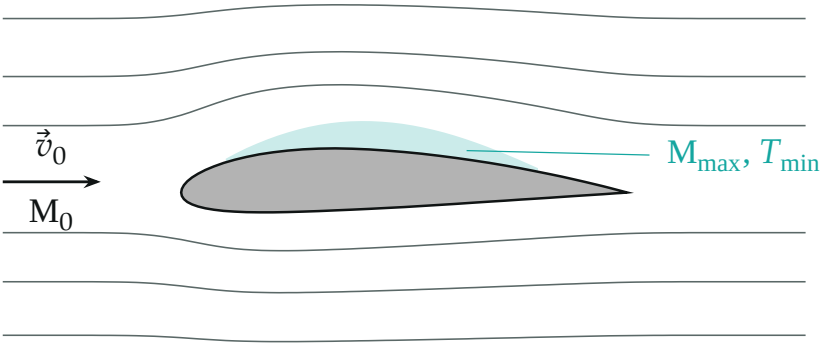


Рис. 6

▲ **Решение. Что происходит.** В системе отсчёта самолёта воздух обтекает крыло. Там, где поток ускоряется, по уравнению Бернулли его температура падает, а при адиабатическом расширении вместе с ней падает и давление — в том числе парциальное давление водяного пара. Пар конденсируется, если где-то его парциальное давление догонит давление насыщенного пара при местной температуре. Главная идея задачи: давление насыщенного пара падает с температурой гораздо быстрее, чем давление пара в потоке, поэтому опаснее всего самое холодное место —

там, где скорость максимальна. Граничная влажность — та, при которой пар в этом месте становится ровно насыщенным.



Поясняющий рисунок: обтекание крыла в системе отсчёта самолёта. Над крылом линии тока сгущаются, поток быстрее всего, а воздух холоднее всего — там и появляется паровой конус

Обозначения. c_P — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, T, P, v, M — температура, давление, скорость и число Маха в произвольной точке потока; индекс 0 — набегающий поток вдали от самолёта, min — точка с наибольшей скоростью. $p_{\text{п}}$ — парциальное давление пара в потоке, $P_{\text{нас}}(T)$ — давление насыщенного пара (рис. 6), $\varphi = p_{\text{п}0}/P_{\text{нас}}(T_0)$ — влажность окружающего воздуха.

1. Пар движется вместе с воздухом. Пар — малая примесь, перемешанная с воздухом: у него та же температура, что у воздуха в этой точке, а доля молекул пара в каждой порции газа не меняется (порция движется как целое, конденсации пока нет). По закону Дальтона $p_{\text{п}} = xP$, где x — эта мольная доля. Значит, давление пара меняется пропорционально давлению воздуха:

$$\frac{p_{\text{п}}}{P} = \text{const} \quad \text{вдоль потока.}$$

2. Теплоёмкость через γ. Для идеального газа по формуле Майера $c_P - c_V = R$, а $c_P/c_V = \gamma$, откуда

$$c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{7}{2}R.$$

3. Температура в зависимости от числа Маха. Подставим $v = \mathrm{M}c$ и $c^2 = \gamma RT/\mu$ в уравнение Бернулли:

$$\frac{\mathrm{M}^2}{2}\cdot\frac{\gamma RT}{\mu} + \frac{\gamma RT}{(\gamma-1)\mu} = \text{const} \quad\Rightarrow\quad T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right) = \text{const}.$$

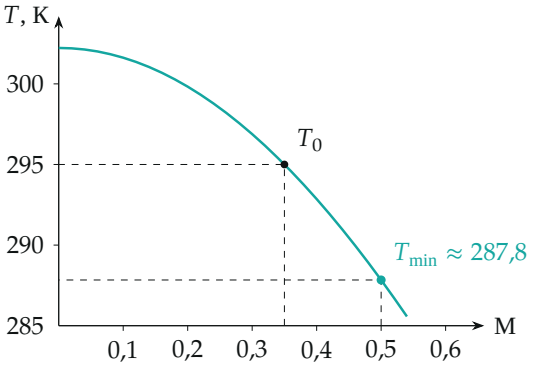
Константа одна для всей линии тока, поэтому связь двух точек потока такая:

$$T = T_0\,\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_0^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2}.$$

Чем больше M, тем ниже T: минимум температуры — в точке, где $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\max}$. При $\frac{\gamma-1}{2} = 0{,}2$:

$$T_{\min} = 295\ \text{K}\cdot\frac{1+0{,}2\cdot 0{,}35^2}{1+0{,}2\cdot 0{,}5^2} = 295\ \text{K}\cdot\frac{1{,}0245}{1{,}05} \approx 287{,}8\ \text{K}.$$

Воздух охлаждается на 7,2 K. Для наглядности: скорость звука вдали $c_0 = \sqrt{\gamma RT_0/\mu} \approx 344$ м/с, набегающий поток $v_0 \approx 120$ м/с, а над крылом $v_{\max} \approx 170$ м/с.



Температура в потоке в зависимости от местного числа Маха: от $T_0 = 295$ K вдали до $T_{\min}$ над крылом

4. Давление и температура на адиабате. Течение адиабатическое и без трения, поэтому каждая порция газа расширяется по адиабате

$P\rho^{-\gamma} = \text{const}$. По уравнению Менделеева — Клапейрона $\rho = \dfrac{\mu P}{RT}$, и

$$P\left(\frac{P}{T}\right)^{-\gamma} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad P \propto T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = T^{3{,}5}.$$

По пункту 1 так же меняется и давление пара: $p_\text{п} = p_{\text{п}0}\,(T/T_0)^{3{,}5}$. В самой холодной точке

$$\left(\frac{T_\text{min}}{T_0}\right)^{3{,}5} = \left(\frac{287{,}84}{295}\right)^{3{,}5} \approx 0{,}918:$$

давление пара (и воздуха) падает там примерно на 8%. Давление P_0 для ответа не понадобится — важна только доля.

5. Где начнётся конденсация. В точке с температурой T пар насыщен, если $p_\text{п}(T) = P_\text{нас}(T)$. Сравним, как быстро падают обе величины при охлаждении. Давление пара в потоке меняется как $T^{3{,}5}$. Давление насыщенного пара по рис. 6 при охлаждении с 295 до 288 К (на 2,4%) падает с 2,61 до 1,69 кПа — на треть, то есть примерно как T^{18}. Поэтому отношение $p_\text{п}/P_\text{нас}$ вдоль потока растёт по мере охлаждения и наибольшее — в самой холодной точке. Конденсации нет нигде, если её нет при T_min (там пар должен быть не более чем насыщен).

Обратите внимание: давление пара в холодной точке тоже меньше, чем вдали. Если забыть об этом и сравнить $p_{\text{п}0}$ сразу с $P_\text{нас}(T_\text{min})$, получится $\varphi \approx 64\%$ — заметно меньше верного.

6. Значения с графика. По рис. 6 (одна мелкая клетка — 0,5 К и 0,05 кПа):

$$P_\text{нас}(T_0 = 295\ \text{К}) \approx 2{,}61\ \text{кПа}, \qquad P_\text{нас}(T_\text{min} = 287{,}8\ \text{К}) \approx 1{,}67\ \text{кПа}.$$

В критериях организаторов взяты 2,65 и 1,68 кПа, отсюда их 69%; по самому графику точнее 2,61 кПа.

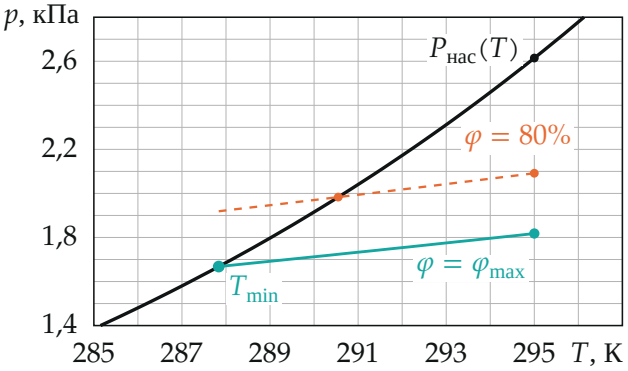
7. Граничная влажность. На границе пар при $T_{\min}$ ровно насыщен:

$$p_{\text{п}0}\left(\frac{T_{\min}}{T_0}\right)^{3,5} = P_{\text{нас}}(T_{\min}) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_{\max} = \frac{p_{\text{п}0}}{P_{\text{нас}}(T_0)} = \frac{P_{\text{нас}}(T_{\min})}{P_{\text{нас}}(T_0)}\left(\frac{T_0}{T_{\min}}\right)^{3,5}.$$

$$\varphi_{\max} \approx \frac{1{,}67}{2{,}61}\cdot 1{,}090 \approx 0{,}70.$$

При влажности ниже $\approx 70\%$ пар нигде не достигает насыщения и паровой конус не образуется.



Чёрная кривая — давление насыщенного пара (рис. 6). Цветные — давление пара в потоке $p_n \propto T^{3,5}$ от $T_0 = 295$ K до $T_{\min}$: при $\varphi = \varphi_{\max}$ пар становится насыщенным ровно в самой холодной точке, при $\varphi = 80\%$ — уже при 290,5 K, раньше, чем поток успевает охладиться до $T_{\min}$

Проверка.

- Размерности: M и $(T_0/T_{\min})^{3,5}$ безразмерны, φ — отношение давлений.
- Предел $\text{M}_{\max} = \text{M}_0$ (крыло не ускоряет поток): $T_{\min} = T_0$ и $\varphi_{\max} = 100\%$ — конус возможен, только если воздух уже насыщен.
- Второй способ для $T_{\min}$ — через скорости, по уравнению Бернулли в исходном виде: $T_0 - T_{\min} = \mu\,(v_{\max}^2 - v_0^2)/(2c_P)$, то есть $0{,}029\cdot(170^2 - 120^2)/(2\cdot 29{,}1)$ K $\approx 7{,}2$ K — совпадает.

Физический смысл: охлаждение всего на 7 К при адиабатическом расширении уменьшает давление пара лишь на 8%, а насыщенное давление — на треть. Поэтому даже не очень влажный воздух (около 70%) над крылом становится пересыщенным, и в нём появляется туман.

Ответ. $\varphi_{\max} \approx 70\%$ (с точностью чтения графика 69–70%): $\varphi_{\max} = (P_{\text{нас}}(T_{\min})/P_{\text{нас}}(T_0)) \cdot (T_0/T_{\min})^{3{,}5}$, где $T_{\min} = T_0\,(1 + 0{,}2\mathrm{M}_0^2)/(1 + 0{,}2\mathrm{M}_{\max}^2) \approx 287{,}8$ К, $P_{\text{нас}}(T_{\min}) \approx 1{,}67$ кПа, $P_{\text{нас}}(T_0) \approx 2{,}61$ кПа.