Неупругие удары

Задача 1. [МОШ 2025/26, 11 класс, задача 1] В теории удара столкновение тел характеризуется *коэффициентом восстановления* e. Он равен отношению модулей проекций относительной скорости точек контакта на общую нормаль после и до удара. В данной задаче считается, что e зависит только от материала тел.

Маленькая гладкая шайба массой m, движущаяся со скоростью v, сталкивается с гантелью из двух одинаковых гладких шайб, каждая из которых имеет массу nm. Шайбы соединены жёстким невесомым стержнем. При ударе перпендикулярно стержню (рис. 1) налетающая шайба после столкновения останавливается. При ударе вдоль оси стержня в одну из шайб (рис. 2) налетающая шайба отскакивает в противоположную сторону со скоростью $v/5$.

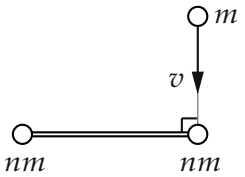


Рис. 1

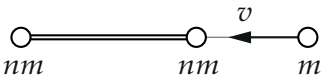
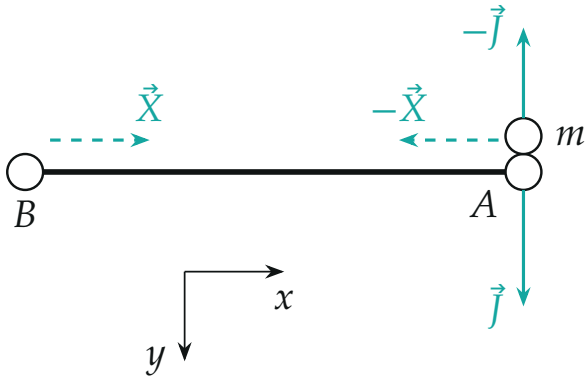


Рис. 2

1. Найдите отношение массы шайбы гантели к массе налетающей шайбы n и коэффициент восстановления e.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Удар короткий: за время удара шайбы не успевают сместиться, а горизонтальных внешних сил нет (стол гладкий), поэтому импульс системы «налетающая шайба + гантель» сохраняется. Шайбы гладкие, значит, друг на друга они действуют только вдоль общей нормали — линии, соединяющей их центры. На каждый удар получаем два уравнения: закон сохранения импульса и определение e. Неизвестных в каждом ударе тоже два: скорость гантели и одно из чисел n, e. Главная идея задачи — понять, как гантель движется сразу после удара: при ударе поперёк вторая шайба гантели не получает импульса и остаётся на месте, а при ударе вдоль гантель уходит целиком.

Обозначения. A — шайба гантели, по которой бьют, B — вторая шайба гантели, C — центр масс гантели (середина стержня), l — длина стержня. Скорости сразу после удара: V_1 — шайбы A в первом ударе, u_1 — центра C в первом ударе, u_2 — гантели во втором ударе.



Импульсы сил за время первого удара. $\vec{J}$ — от налетающей шайбы, $\pm\vec{X}$ — от стержня (вдоль него); ниже показано, что $X = 0$.

Удар 1, перпендикулярно стержню. 1. Стержень за время удара не толкает шайбы. Налетающая шайба действует на шайбу A вдоль общей нормали, то есть перпендикулярно стержню; импульс этой силы за удар обозначим $\vec{J}$. Стержень невесомый, и силы к нему приложены только на концах. Тогда для него сумма сил и сумма моментов равны нулю, только если обе силы направлены вдоль стержня навстречу друг другу. Значит, на шайбы стержень действует вдоль себя: импульс $\vec{X}$ на шайбу B и $-\vec{X}$ на шайбу A.

Стержень жёсткий, его длина не меняется, поэтому проекции скоростей шайб A и B на ось x вдоль стержня одинаковы. До удара обе равны нулю, после удара по второму закону Ньютона в импульсной форме для каждой шайбы они равны $-X/(nm)$ и $X/(nm)$. Равенство возможно только при $X = 0$.

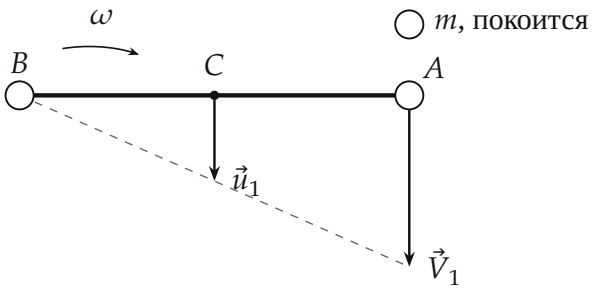
Отсюда: шайба B после удара покоится — это мгновенный центр скоростей гантели, а шайба A получает скорость $V_1 = J/(nm)$, направленную вдоль $\vec{v}$.

2. Закон сохранения импульса системы «налетающая шайба + гантель» за время удара, в проекции на ось y (налетающая шайба после удара покоится, шайба B — тоже):

$$mv = nm\,V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{v}{n}.$$

3. Коэффициент восстановления. Точки контакта — налетающая шайба и шайба A. Проекция их относительной скорости на нормаль до удара равна v, после удара $V_1 - 0$:

$$e = \frac{V_1}{v} = \frac{1}{n}.$$



Скорости сразу после первого удара: гантель поворачивается вокруг шайбы B, скорости точек стержня растут линейно (пунктир).

Второй способ. Запишем закон сохранения момента импульса системы относительно точки, где находился центр C, и закон сохранения импульса. Момент инерции гантели относительно C равен $I = 2nm\,(l/2)^2 = nml^2/2$:

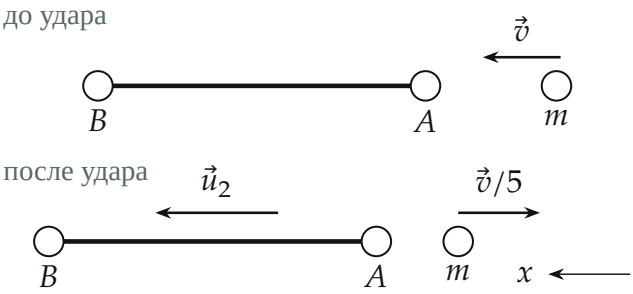
$$mv \cdot \frac{l}{2} = I\omega, \qquad mv = 2nm\,u_1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{nl}, \qquad u_1 = \frac{v}{2n}.$$

Скорость шайбы A равна $V_1 = u_1 + \omega\dfrac{l}{2} = \dfrac{v}{n}$, а шайбы B — $u_1 - \omega\dfrac{l}{2} = 0$, как и в пункте 1.

Удар 2, вдоль оси стержня. 4. Закон сохранения импульса системы «налетающая шайба + гантель» за время второго удара, в проекции на ось x вдоль начальной скорости налетающей шайбы. Теперь удар направлен вдоль стержня, жёсткий стержень передаёт его второй шайбе, и гантель движется как одно тело массой $2nm$:

$$mv = 2nm\,u_2 - m\frac{v}{5} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{3v}{5n}.$$

Обратите внимание: после первого удара гантель «откликнулась» массой одной шайбы nm (шайба B не сдвинулась), а здесь — массой обеих шайб $2nm$. Считать во втором ударе, что шайба A отскакивает одна, — ошибка: стержень жёсткий.



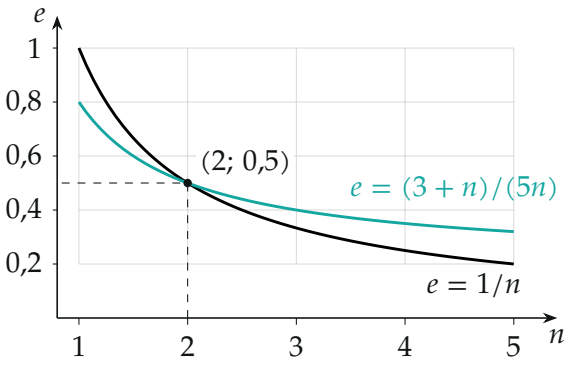
Второй удар: все тела на одной прямой, гантель уходит целиком. Длины стрелок — для найденного ниже $n = 2$: $u_2 = 0{,}3\,v$.

5. Коэффициент восстановления. До удара шайбы m и A сближались со скоростью v, после удара расходятся со скоростью $u_2 + v/5$:

$$e = \frac{u_2 + v/5}{v} = \frac{3}{5n} + \frac{1}{5} = \frac{3+n}{5n}.$$

6. Одно и то же e. Материал шайб в обоих ударах один, поэтому коэффициенты восстановления из пунктов 3 и 5 равны:

$$\frac{1}{n} = \frac{3+n}{5n} \quad \Rightarrow \quad 5 = 3 + n \quad \Rightarrow \quad n = 2, \qquad e = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$



Связь e и n из первого удара (чёрная) и из второго (бирюзовая): совместимы они в одной точке.

Проверка. Числа n и e безразмерны, как и должно быть. Удар неупругий, энергия не должна расти. Доли кинетической энергии, которые остаются после первого и второго ударов:

$$\frac{nmV_1^2}{mv^2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2nm\,u_2^2 + m(v/5)^2}{mv^2} = \frac{18}{25n} + \frac{1}{25} = 0{,}4.$$

Обе доли меньше единицы, и $0 < e < 1$. Предельный случай: при упругом ударе ($e = 1$) первое уравнение дало бы $n = 1$ — налетающая шайба отдаёт всю скорость шайбе A равной массы, как при лобовом ударе одинаковых шайб.

Физический смысл такой: при ударе поперёк стержня гантель на мгновение «откликается» как одна шайба массой nm (вторая шайба — неподвижная ось вращения), а при ударе вдоль — как тело массой $2nm$. Разница этих «откликов» при одном и том же e и задаёт n.

Ответ. $n = 2$, $e = 0{,}5$.