Колебания поршня

Задача 2. [МОШ 2025/26, 11 класс, задача 2] В вертикальном цилиндре под поршнем массой m, способным двигаться вдоль его оси без трения, находится ν молей идеального газа. Давление и температура окружающего воздуха равны P_0 и T_0, площадь сечения цилиндра — S. Удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме равна c_V. Теплоёмкостью цилиндра и поршня можно пренебречь. Первоначально система находится в равновесии, температура газа равна T_0.

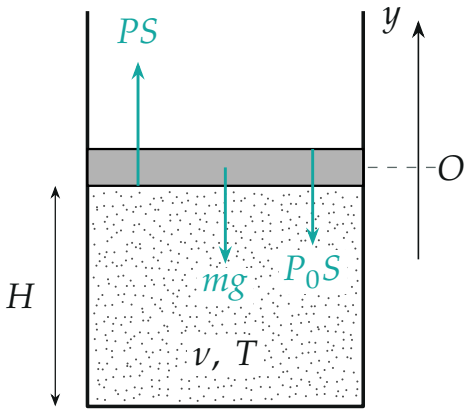
1. Считая процессы в газе квазистатическими, определите циклическую частоту малых свободных колебаний поршня в двух случаях: при поддержании постоянной температуры газа (Ω_T) и в условиях полной теплоизоляции цилиндра (Ω_S).
2. Пусть теперь цилиндр не изолирован. Мощность теплопередачи вследствие теплообмена между газом под поршнем и окружающим воздухом задаётся выражением:

$$N = \beta(T - T_0),$$

где T — температура газа, β — известный коэффициент. Под действием периодической внешней силы поршень совершает малые вынужденные колебания по закону:

$$y(t) = h\sin(\Omega t),$$

где y — отклонение поршня от положения равновесия, ось OY направлена вверх. Через некоторое время после начала действия силы устанавливаются малые гармонические колебания разности температур $\Delta T = T - T_0$. Определите амплитуду этих колебаний и разность фаз между колебаниями разности температур и вертикальной координаты поршня.



Поясняющий рисунок: силы на поршень, ось y с началом в положении равновесия, $H = V/S$ — высота столба газа.

▲ **Решение. Что происходит.** Поршень — груз на «газовой пружине». Сместился поршень на y — объём газа изменился на Sy, давление изменилось на ΔP, и сила $\Delta P\, S$ тянет поршень назад. Жёсткость пружины зависит от того, как связаны ΔP и ΔV: при постоянной температуре это изотерма, без теплообмена — адиабата, она круче. Во втором пункте работа газа нагревает и охлаждает его, а теплообмен с воздухом «уводит» тепло; температура подчиняется первому началу термодинамики, и в установившемся режиме колеблется с частотой поршня, но со сдвигом фазы.

Обозначения. P — давление газа, V — его объём; индекс «р» — равновесные значения. Ось y направлена вверх, начало — в положении равновесия поршня. Обратите внимание: в условии c_V названа удельной, но ни массы, ни молярной массы газа не дано. Поэтому c_V понимаем как теплоёмкость одного моля, $U = \nu c_V T$ — так её понимают и критерии организаторов. Если c_V всё же отнесена к килограмму, во всех ответах νc_V заменяется на $\nu \mu c_V$, где μ — молярная масса.

Пункт 1

1. Равновесие поршня. В равновесии сумма сил на поршень равна нулю: вверх давит газ, вниз — воздух и сила тяжести:

$$P_\text{р} S = P_0 S + mg \quad \Rightarrow \quad P_\text{р} = P_0 + \frac{mg}{S}, \qquad V_\text{р} = \frac{\nu R T_0}{P_\text{р}}$$

(объём — из уравнения Менделеева — Клапейрона).

2. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось y при смещении y, когда давление газа $P = P_{\text{р}} + \Delta P$:

$$m\ddot{y} = PS - P_0 S - mg = \Delta P\, S.$$

Объём газа при этом $V = V_{\text{р}} + Sy$, то есть $\Delta V = Sy$.

3. Изотерма. При $T = T_0$ выполняется $PV = \text{const}$. Для малых изменений $V\,\Delta P + P\,\Delta V = 0$, откуда

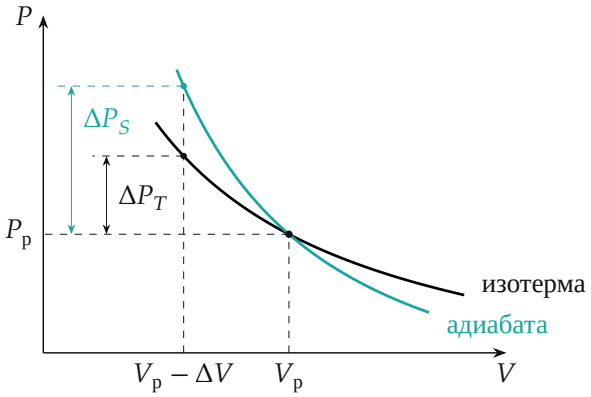
$$\Delta P = -\frac{P_{\text{р}}}{V_{\text{р}}}\,Sy, \qquad m\ddot{y} = -\frac{P_{\text{р}} S^2}{V_{\text{р}}}\,y.$$

Это уравнение гармонических колебаний; квадрат частоты равен коэффициенту при $-y$, делённому на m:

$$\Omega_T^2 = \frac{P_{\text{р}} S^2}{m V_{\text{р}}} = \frac{P_{\text{р}}^2 S^2}{m\nu R T_0} \quad \Rightarrow \quad \Omega_T = \frac{P_0 S + mg}{\sqrt{m\nu R T_0}}.$$

4. Адиабата. Без теплообмена квазистатический процесс в идеальном газе — адиабата $PV^\gamma = \text{const}$ с показателем $\gamma = (c_V + R)/c_V$ (по формуле Майера $c_P = c_V + R$). Для малых изменений $V\,\Delta P + \gamma P\,\Delta V = 0$, то есть $\Delta P = -\gamma P_{\text{р}} \Delta V / V_{\text{р}}$ — «пружина» в γ раз жёстче:

$$\Omega_S^2 = \gamma\,\Omega_T^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_S = \frac{P_0 S + mg}{\sqrt{m\nu R T_0}} \sqrt{1 + \frac{R}{c_V}}.$$



Изотерма и адиабата через состояние равновесия (масштаб для $\gamma = 5/3$): при том же сжатии ΔV на адиабате давление растёт в γ раз сильнее.

Пункт 2

5. Первое начало термодинамики для газа за малый промежуток времени dt: подведённое к газу тепло идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа, $\delta Q = \nu c_V\, dT + P\, dV$. Тепло уходит от газа к воздуху, когда $T > T_0$, поэтому $\delta Q = -\beta(T - T_0)\, dt$. Разделим на dt; учтём $dV = S\, dy$ и то, что T_0 постоянна, а $T - T_0 = \Delta T$:

$$\nu c_V \frac{d\Delta T}{dt} + \beta\, \Delta T = -PS\, \dot{y}.$$

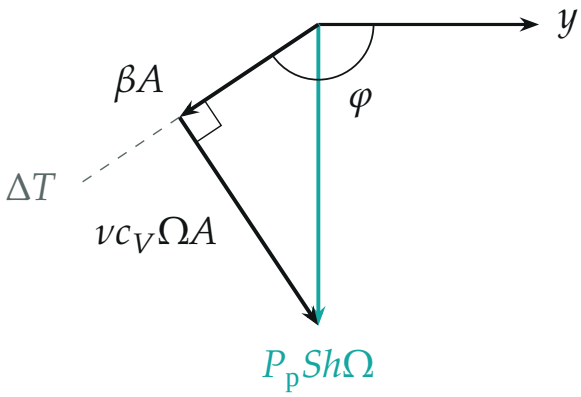
Колебания малые: $PS\dot{y} = (P_\text{р} + \Delta P)S\dot{y}$, а $\Delta P\, \dot{y}$ — произведение двух малых величин. Отбросим его и подставим $\dot{y} = h\Omega \cos \Omega t$:

$$\nu c_V \frac{d\Delta T}{dt} + \beta\, \Delta T = -P_\text{р} Sh\Omega \cos \Omega t.$$

Обратите внимание: давление в этом уравнении меняется вместе с температурой, но в первом порядке малости работу газа задаёт только равновесное давление $P_\text{р}$. Поэтому уравнение линейно, и установившиеся колебания ΔT гармонические с частотой Ω.

6. Векторная диаграмма. Каждое гармоническое слагаемое — вектор: длина — амплитуда, угол — фаза относительно $y(t)$. Пусть $\Delta T = A \sin(\Omega t - \varphi)$, то есть вектор ΔT повёрнут от y на φ по часовой стрел-

ке. Вектор $\beta\Delta T$ направлен так же, длина βA. Производная опережает функцию на $\pi/2$: вектор $\nu c_V\, d\Delta T/dt$ длины $\nu c_V \Omega A$ перпендикулярен ΔT и повёрнут против часовой стрелки. Правая часть $-P_\text{п} Sh\Omega\cos\Omega t = P_\text{п} Sh\Omega\sin(\Omega t - \pi/2)$ отстаёт от y на $\pi/2$.



Векторная диаграмма уравнения пункта 5 (для $\nu c_V\Omega/\beta = 1{,}5$): два перпендикулярных слагаемых левой части в сумме дают правую часть.

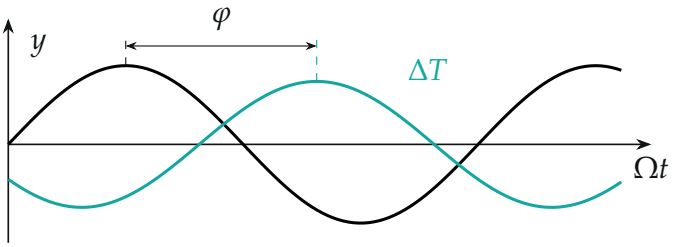
Получился прямоугольный треугольник, по теореме Пифагора

$$A\sqrt{\beta^2 + (\nu c_V\Omega)^2} = P_\text{п} Sh\Omega \quad\Rightarrow\quad A = \frac{(P_0 S + mg)\,h\,\Omega}{\sqrt{\beta^2 + \nu^2 c_V^2\Omega^2}}.$$

Вектор βA отстаёт от вектора правой части на угол, тангенс которого $\nu c_V\Omega/\beta$, а сам вектор правой части отстаёт от y на $\pi/2$. Значит,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\nu c_V\Omega}{\beta} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\nu c_V\Omega}, \qquad \Delta T = A\sin(\Omega t - \varphi).$$

Отставание φ лежит между $\pi/2$ (сильный теплообмен) и π (слабый).



Установившийся режим при $\nu c_V\Omega/\beta = 1{,}5$ ($\varphi \approx 146°$, амплитуды условные): максимум ΔT позже максимума y на φ/Ω.

Проверка. Размерность: $[P_0 Sh\Omega] = \text{Н}\cdot\text{м/с} = \text{Вт}$, а $[\beta] = [\nu c_V\Omega] = \text{Вт/К}$, так что $[A] = \text{К}$; частоты: $[(P_0S)^2/(m\nu RT_0)] = \text{Н}^2/(\text{кг}\cdot\text{Дж}) = \text{с}^{-2}$.

- Нет теплообмена, $\beta \to 0$: $A \to P_\text{п}Sh/(\nu c_V)$, $\varphi \to \pi$, то есть $\Delta T = -P_\text{п}Sy/(\nu c_V)$. То же даёт адиабата пункта 1: из $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ и $P_\text{п}V_\text{п} = \nu RT_0$

$$\Delta T = -(\gamma-1)\,T_0\,\frac{Sy}{V_\text{п}} = -\frac{R}{c_V}\cdot\frac{P_\text{п}Sy}{\nu R} = -\frac{P_\text{п}S}{\nu c_V}\,y.$$

  Поршень поднялся — газ расширился и остыл, колебания в противофазе.
- Очень сильный теплообмен, $\beta \to \infty$: $A \to 0$ — газ всё время при температуре T_0, процесс изотермический, как в пункте 1.

Физический смысл такой: работа газа «закачивает» и «откачивает» тепло, а теплообмен с воздухом его рассеивает. Чем быстрее колебания по сравнению со временем остывания $\nu c_V/\beta$, тем ближе процесс к адиабате и тем ближе ΔT к противофазе с y.

Ответ. 1) $\Omega_T = \dfrac{P_0S + mg}{\sqrt{m\nu RT_0}}$, $\Omega_S = \Omega_T\sqrt{\dfrac{c_V + R}{c_V}}$ (c_V — теплоёмкость на моль); 2) $\Delta T = A\sin(\Omega t - \varphi)$, $A = \dfrac{(P_0S + mg)\,h\Omega}{\sqrt{\beta^2 + \nu^2 c_V^2\Omega^2}}$; ΔT отстаёт от y по фазе на $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{\nu c_V\Omega}{\beta}$.