Построение

Задача 3. [МОШ 2025/26, 11 класс, задача 3] Тонкая собирающая идеальная линза и плоское зеркало (см. рис. 3) расположены параллельно на расстоянии, равном фокусному расстоянию линзы f. Идеальной называется тонкая линза, в которой любые лучи, в том числе идущие под большими углами к оптической оси, преломляются как параксиальные (приосевые).

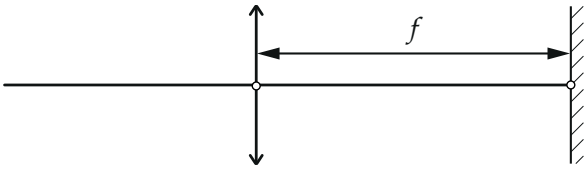


Рис. 3

1. Светящаяся точка находится на расстоянии a от линзы ($f \leqslant a \leqslant 2f$) со стороны, противоположной зеркалу. На каком расстоянии от линзы расположено её изображение в этой системе?
2. На рис. 4 показано изображение предмета в виде окружности (плоскость окружности перпендикулярна плоскости зеркала), полученное в этой оптической системе. Известно, что изображение совпадает с предметом; точки L и M, отмеченные на рис. 4, принадлежат линзе и зеркалу соответственно.

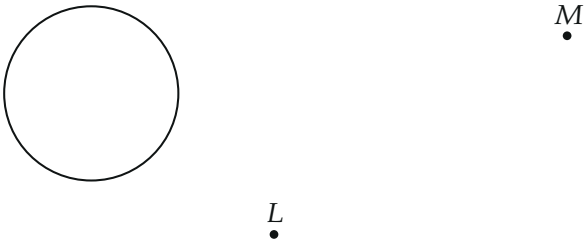


Рис. 4

С помощью циркуля и линейки на дополнительном листе с увеличенным рис. 4 постройте оптический центр и фокусы линзы. Приведите

обоснование вашего построения (описывать алгоритм стандартных геометрических построений не требуется). Дополнительный лист с выполненным построением следует сдать вместе с работой.

▲ **Решение. Что происходит.** Свет проходит линзу, отражается от зеркала и снова проходит линзу. Зеркало стоит в фокальной плоскости линзы, и от этого система получается особенной: любой луч, параллельный оси, после линзы идёт в фокус F' — точку на самом зеркале, — отражается симметрично и возвращается параллельно оси с другой стороны от неё. Главная идея задачи: такая система переводит каждую точку в точку, симметричную ей относительно переднего фокуса F. Отсюда сразу и ответ первого пункта, и построение второго.

Обозначения. O — оптический центр линзы, F — её фокус со стороны предмета, F' — фокус со стороны зеркала (он лежит на зеркале: $OF' = f$). Расстояния отсчитываем от линзы. S — светящаяся точка, S^* — её изображение в системе, b — расстояние от линзы до S^*.

Пункт 1

1. Первое прохождение линзы. По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{af}{a-f} \geqslant 2f \quad \text{при } f \leqslant a \leqslant 2f.$$

Лучи сходятся к точке S_1 на расстоянии a_1 за линзой, то есть за зеркалом (оно на расстоянии f). До S_1 они не доходят: их перехватывает зеркало.

2. Отражение в зеркале. Сходящийся пучок, нацеленный в точку S_1 за зеркалом, после отражения сходится к точке S_2, симметричной S_1 относительно зеркала: на расстоянии $a_1 - f$ перед зеркалом. Это дальше от зеркала, чем линза ($a_1 - f \geqslant f$), поэтому отражённые лучи снова встречают линзу раньше, чем сойдутся. Для второго прохождения S_2 — *мнимый* предмет за линзой (со стороны предмета S) на расстоянии

$$d_2 = a_1 - 2f = \frac{af}{a-f} - 2f = \frac{f(2f-a)}{a-f}.$$

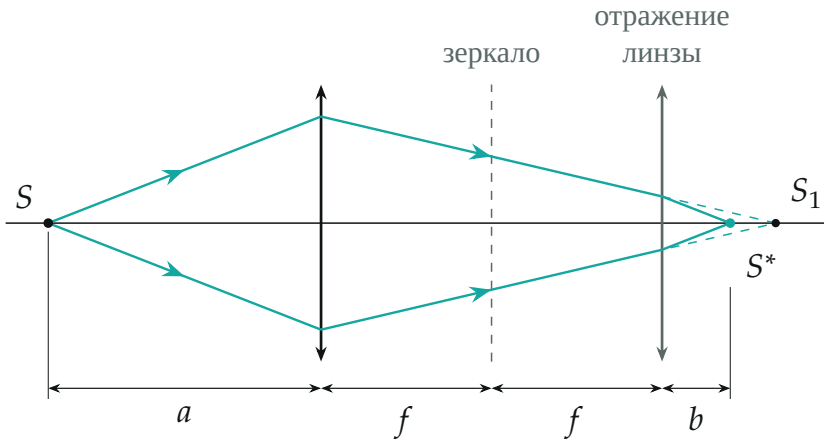
3. Второе прохождение линзы. Формула линзы для мнимого пред-

мета (его расстояние входит со знаком минус):

$$-\frac{1}{d_2}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b}=\frac{1}{f}+\frac{a-f}{f\,(2f-a)}=\frac{(2f-a)+(a-f)}{f\,(2f-a)}=\frac{1}{2f-a}.$$

Получаем $b = 2f - a \geqslant 0$: изображение действительное, со стороны предмета, на расстоянии $2f - a$ от линзы.

Обратите внимание: на втором проходе на линзу падает сходящийся пучок, и предмет для неё мнимый. Если подставить d_2 со знаком «плюс», получится неверный ответ $b = f(2f - a)/(3f - 2a)$.



Развёртка хода лучей: отражение в зеркале заменено прохождением через зеркальное отражение линзы на расстоянии $2f$. Рисунок для $a = 1{,}6f$: $a_1 = 2{,}67f$, $b = 0{,}4f$. Изображение S^* на развёртке отражаем обратно в зеркале — оно на расстоянии b от линзы со стороны S.

4. Увеличение. Поперечные увеличения перемножаются: при первом проходе $\Gamma_1 = -a_1/a = -f/(a - f)$, плоское зеркало размер и ориентацию по высоте не меняет, при втором проходе (мнимый предмет) $\Gamma_3 = b/d_2 = (a - f)/f$. Итог

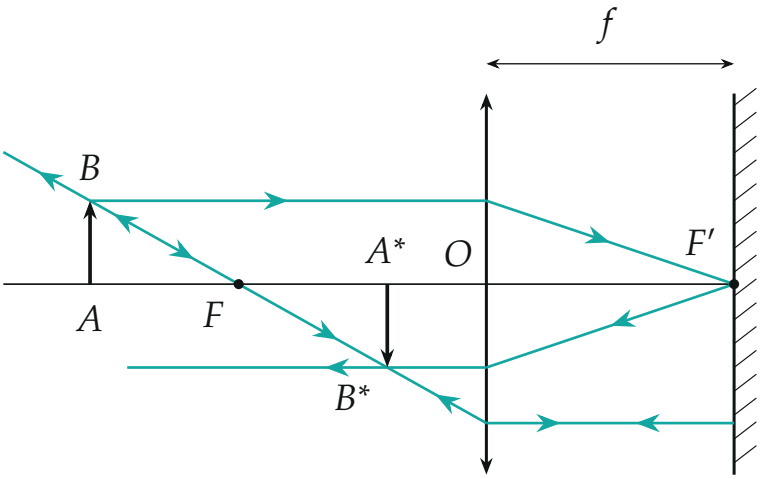
$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_3 = -\frac{f}{a-f}\cdot\frac{a-f}{f} = -1$$

при любом a: изображение перевёрнутое и того же размера. От фокуса F (он на расстоянии f от линзы) точка S отстоит на $a - f$ в одну сторону, а S^* — на $f - b = a - f$ в другую. Вместе с $\Gamma = -1$ это значит: *изображение симметрично предмету относительно точки F*. В критериях организаторов изображение названо прямым; оба способа — формулы и ход лучей ниже — дают перевёрнутое.

Второй способ — два луча. Пусть точка B находится на высоте h над осью. Проследим два луча из неё (рисунок ниже).

- Луч, параллельный оси, после линзы идёт в фокус F' — он на зеркале, на оси. Отразившись, луч идёт симметрично, к точке линзы на высоте $-h$, и выходит из неё параллельно оси на высоте $-h$.
- Луч через передний фокус F после линзы идёт параллельно оси, падает на зеркало перпендикулярно, отражается назад по себе же и возвращается тем же путём — снова через F.

Изображение B^* — пересечение вернувшихся лучей: точка на прямой BF на высоте $-h$. Это точка, симметричная B относительно F. Рассуждение годится для любой точки: идеальная линза одинаково преломляет и лучи под большими углами.



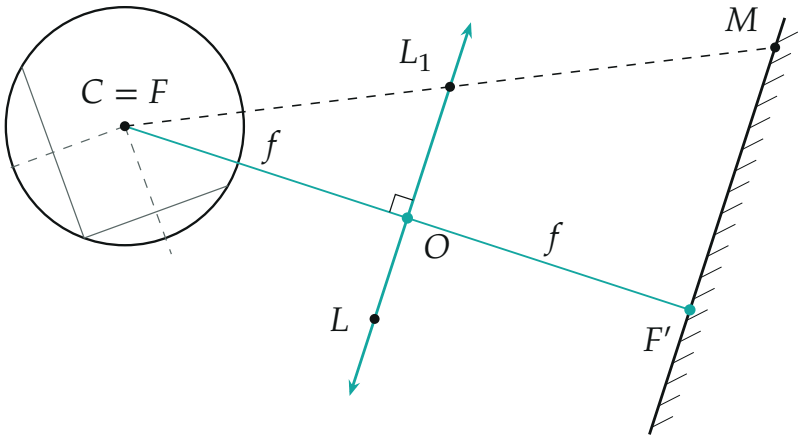
Ход двух лучей из точки B (для $a = 1{,}6f$). Луч через F возвращается по себе. B^* симметрична B относительно F.

Пункт 2

5. Где фокус. По пункту 1 система переводит каждую точку в точку, симметричную ей относительно фокуса F. Плоскость окружности перпендикулярна зеркалу, то есть содержит оптическую ось, — это плоскость рисунка, и в ней работает построение пункта 1. Изображение окружности — окружность, симметричная ей относительно F; её центр — точка, симметричная центру C исходной окружности. Окружности совпадают, только если центры совпадают, то есть $C = F$: *передний фокус линзы — центр окружности*. Центр C находим как пересечение серединных перпендикуляров к двум хордам.

6. Где линза. Линза параллельна зеркалу и отстоит на f и от фокуса F, и от зеркала (по разные стороны). Значит, плоскость линзы — серединная между плоскостью, проходящей через F параллельно зеркалу, и плоскостью зеркала. Середина любого отрезка от F до точки зеркала лежит в плоскости линзы. Отсюда середина L_1 отрезка CM принадлежит линзе, и прямая LL_1 — след линзы на рисунке.

7. Ось, центр и второй фокус. Главная оптическая ось проходит через фокус $F = C$ перпендикулярно линзе: опускаем перпендикуляр из C на прямую LL_1. Его основание — оптический центр O. Второй фокус F' — на продолжении оси за O на таком же расстоянии: $OF' = OC = f$. Для контроля: прямая через M, параллельная LL_1 (зеркало), проходит через F'.



Построение на рис. 4: центр окружности C (серединные перпендикуляры к хордам — серый пунктир) — это фокус F; середина L_1 отрезка CM лежит на линзе; линза — прямая LL_1; перпендикуляр из C на неё — главная оптическая ось с центром O; F' на оси, $OF' = OC$, и он лежит на зеркале.

Проверка. При $a = f$ точка стоит в фокусе F и по формуле $b = f$ — изображение там же, как и должно быть при симметрии относительно F. При $a = 2f$ получаем $b = 0$: первое изображение S_1 оказалось бы на расстоянии $2f$, ровно на отражении линзы в зеркале, и после отражения лучи собираются на самой линзе. Построение пункта 2 не противоречиво: точка M и найденный фокус F' лежат на одной прямой, параллельной линзе (в масштабе рис. 4 организаторов $f \approx 28$ мм, линза наклонена к горизонтали под углом $72°$).

Физический смысл такой: две линзы с общим фокусом (линза и её отражение) образуют телескопическую систему с увеличением -1, а сложенная зеркалом пополам она превращается в «центральную симметрию» относительно фокуса F.

Ответ. 1) на расстоянии $2f - a$ от линзы со стороны предмета; изображение действительное, перевёрнутое, того же размера, симметричное предмету относительно фокуса F; 2) передний фокус F — центр окружности C; линза — прямая через L и середину L_1 отрезка CM; оптический центр O — основание перпендикуляра из C на эту прямую; второй фокус F' — на оси за O, $OF' = OC$ (он лежит на зеркале).