Polyswitch

Задача 4. [МОШ 2025/26, 11 класс, задача 4] Плавкий предохранитель — это одноразовый защитный элемент. Его современной многоразовой альтернативой является самовосстанавливающийся предохранитель (известный также под названием Polyswitch).

В основе устройства лежит полимерный материал с проводящими вкраплениями. При достижении критической температуры $T_{\text{пл}}$ в материале происходит фазовый переход: проводящие пути разрушаются, и электрическое сопротивление устройства резко возрастает. При остывании материала ниже $T_{\text{пл}}$ структура проводящих путей восстанавливается, и сопротивление возвращается к исходному низкому значению.

Поведение некоторого самовосстанавливающегося предохранителя предлагается описывать с помощью следующей упрощённой модели. При температуре ниже критической температуры $T_{\text{пл}} = 120\,^\circ\text{C}$ его сопротивление постоянно и равно $R_1 = 1$ Ом. При $T_{\text{пл}}$ оно скачкообразно увеличивается до $R_2 = 10$ кОм и при дальнейшем нагреве не меняется. В самой точке фазового перехода (при $T = T_{\text{пл}}$) сопротивление может принимать любые промежуточные значения в диапазоне от 1 Ом до 10 кОм.

Считайте, что мощность теплоотдачи от предохранителя в окружающую среду описывается соотношением

$$P = \alpha(T - T_0),$$

где $\alpha = 10$ мВт/°C — коэффициент теплоотдачи, $T_0 = 20\,^\circ\text{C}$ — температура окружающей среды, T — температура предохранителя.

1. Изобразите статическую вольт-амперную характеристику (ВАХ) предохранителя, считая, что в любой точке ВАХ он находится в установившемся тепловом режиме.
2. Пусть предохранитель подключён к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В последовательно с реостатом, сопротивление которого может меняться от 0 до 50 Ом, и катушкой индуктивности L. Считайте, что индуктивность катушки достаточно велика, так что теп-

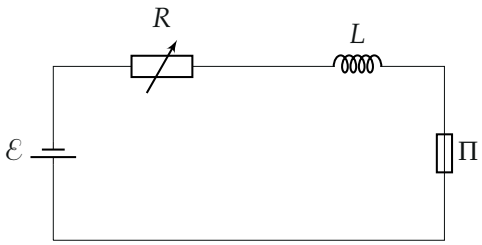
ловой баланс в предохранителе устанавливается гораздо быстрее, чем меняется ток. Это позволяет описывать состояние предохранителя его статической ВАХ в любой момент времени

Сколько рабочих точек теоретически может реализоваться в цепи при различных значениях сопротивления реостата? Какие из этих точек являются устойчивыми относительно флуктуаций тока в цепи?

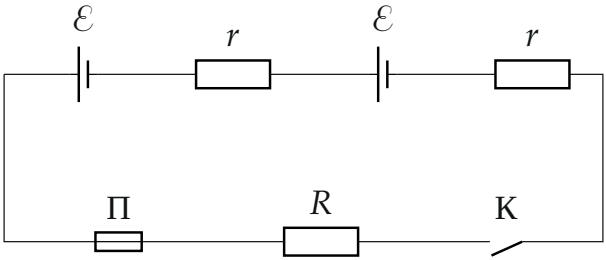
Рабочая точка считается устойчивой по току, если при малом отклонении тока от значения в рабочей точке возникающая в катушке ЭДС самоиндукции стремится вернуть цепь в исходное состояние.

3. Теперь рассмотрим реальную цепь. Предохранитель подключили через ключ последовательно с резистором R к двум соединённым последовательно батарейкам 3R12 (ЭДС каждой $\mathcal{E} = 4{,}5$ В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом). Какой ток установится в цепи после замыкания ключа, если $R = 7$ Ом?

   Опишите качественно процессы, происходящие в цепи после замыкания ключа, если сопротивление резистора равно $R = 2$ Ом. Учтите, что в этом случае ток может изменяться настолько быстро, что температура предохранителя не будет успевать подстраиваться под текущее значение мощности.



Поясняющий рисунок: цепь пункта 2; П — предохранитель.



Поясняющий рисунок: цепь пункта 3 (две батарейки, ключ K, резистор R, предохранитель П).

▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивление предохранителя зависит от температуры, температура — от выделяемой мощности; в установившемся режиме мощность тока равна теплоотдаче. Главная идея: пока идёт фазовый переход, температура «застряла» на $T_{\text{пл}}$, теплоотдача постоянна, и предохранитель потребляет постоянную мощность P_0 — на ВАХ это гипербола $UI = P_0$ с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Рабочие точки цепи — пересечения ВАХ с нагрузочной прямой, а устойчивость решает знак полного сопротивления контура для малых отклонений тока.

Обозначения. U и I — напряжение на предохранителе и ток через него; $R_{\text{п}} = U/I$ — его сопротивление; $P_0 = \alpha(T_{\text{пл}} - T_0)$ — мощность теплоотдачи при температуре перехода; $R_d = dU/dI$ — дифференциальное сопротивление предохранителя.

Пункт 1

1. Условие установившегося режима. Температура не меняется, если тепло, выделяемое током, равно теплу, отданному среде:

$$UI = \alpha(T - T_0).$$

При температуре перехода

$$P_0 = \alpha(T_{\text{пл}} - T_0) = 10\ \text{мВт}/^\circ\text{C} \cdot 100\ ^\circ\text{C} = 1\ \text{Вт}.$$

2. «Холодная» ветвь ($T < T_{\text{пл}}$, $R_{\text{п}} = R_1$): $U = IR_1$, и мощность

$I^2R_1 = \alpha(T - T_0)$ меньше P_0. Значит, ветвь существует до тока

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_0}{R_1}} = 1\text{ А}, \qquad U_1 = I_1R_1 = 1\text{ В}.$$

Температура на ней растёт с током: $T = T_0 + I^2R_1/\alpha$.

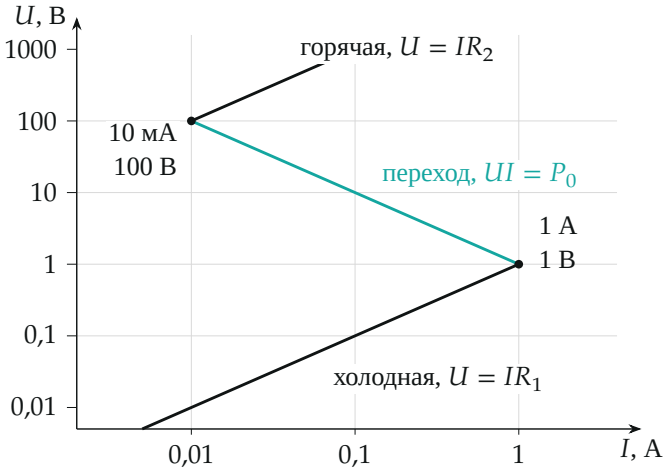
3. Участок перехода ($T = T_{\text{пл}}$). Температура постоянна, поэтому и теплоотдача постоянна, P_0. Сопротивление при этом может быть любым от R_1 до R_2 — оно «подстраивается» так, чтобы выделялась ровно мощность P_0:

$$UI = P_0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{P_0}{I}, \qquad R_{\text{п}} = \frac{P_0}{I^2}.$$

Это гипербола от точки $(I_1; U_1) = (1\text{ А}; 1\text{ В})$, где $R_{\text{п}} = R_1$, до точки, где $R_{\text{п}} = R_2$:

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_0}{R_2}} = 10\text{ мА}, \qquad U_2 = \frac{P_0}{I_2} = 100\text{ В}.$$

4. «Горячая» ветвь ($T > T_{\text{пл}}$, $R_{\text{п}} = R_2$): $U = IR_2$ при $U^2/R_2 > P_0$, то есть при $U > 100$ В, $I > 10$ мА.



Статическая ВАХ предохранителя в логарифмическом масштабе по обеим осям: прямые наклона $+1$ — постоянное сопротивление, наклон -1 — постоянная мощность.

Вся ВАХ: с ростом напряжения ток растёт по прямой до 1 А при 1 В, затем *падает* как P_0/U до 10 мА при 100 В, затем снова растёт по прямой $I = U/R_2$. При токах от 10 мА до 1 А одному току отвечают три напряжения — три состояния предохранителя.

Пункт 2

5. Уравнение цепи. По второму правилу Кирхгофа для контура (предохранитель всё время на статической ВАХ, $U = U(I)$):

$$\mathcal{E} - IR - U(I) - L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Рабочая точка — стационарное состояние, $dI/dt = 0$:

$$U(I) = \mathcal{E} - IR.$$

Это пересечение ВАХ с нагрузочной прямой. Горячая ветвь не годится никогда: на ней $U \geqslant 100\ \text{В} > \mathcal{E}$.

6. Точка на холодной ветви. $I = \mathcal{E}/(R + R_1)$; она лежит на ветви, если $I \leqslant I_1 = 1$ А, то есть при $R \geqslant \mathcal{E}/I_1 - R_1 = 9$ Ом.

7. Точки на гиперболе. Подставим $U = P_0/I$:

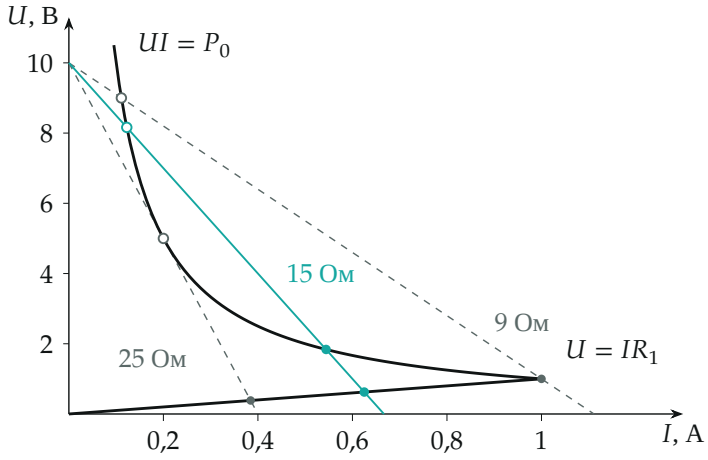
$$I(\mathcal{E} - IR) = P_0 \quad \Rightarrow \quad RI^2 - \mathcal{E}I + P_0 = 0, \qquad I_\pm = \frac{\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4RP_0}}{2R}.$$

Корни есть при $R \leqslant \mathcal{E}^2/(4P_0) = 25$ Ом; при $R = 25$ Ом прямая касается гиперболы в точке $I = 0{,}2$ А, $U = 5$ В. Меньший корень

$$I_- = \frac{2P_0}{\mathcal{E} + \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4RP_0}}$$

лежит между 0,1 и 0,2 А — всегда на гиперболе. Больший корень должен быть не больше $I_1 = 1$ А. Граница — когда $I = I_1$ является корнем: $RI_1^2 - \mathcal{E}I_1 + P_0 = 0$, откуда $R = (\mathcal{E}I_1 - P_0)/I_1^2 = 9$ Ом (та же граница, что

в пункте 6: прямая проходит через излом ВАХ). При $R < 9$ Ом корень $I_+ > 1$ А и на гиперболу не попадает.



ВАХ (чёрная) и нагрузочные прямые $U = \mathcal{E} - IR$: бирюзовая — $R = 15$ Ом (три точки), серый пунктир — граничные $R = 25$ и 9 Ом. Залитые точки устойчивы, пустые — нет.

8. Сколько точек. Собираем пункты 6 и 7:

- $R > 25$ Ом: одна точка, на холодной ветви;
- $R = 25$ Ом: две — холодная и касание гиперболы при $I = 0{,}2$ А;
- 9 Ом $< R < 25$ Ом: три — холодная и две на гиперболе;
- $R = 9$ Ом: две — излом ВАХ (1 А; 1 В), где холодная точка и I_+ совпали, и $I_- = 1/9$ А;
- $R < 9$ Ом: одна, I_- на гиперболе (при $R = 0$ это $I = 0{,}1$ А, $U = 10$ В).

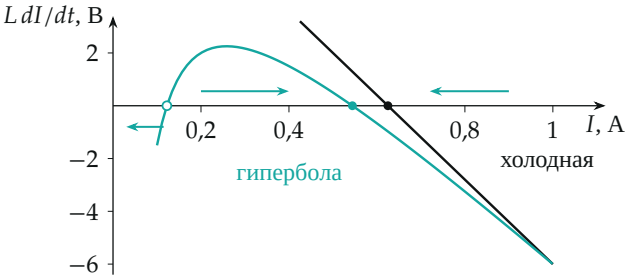
9. Устойчивость. Пусть ток отклонился от рабочего значения на малое δI. Напряжение на предохранителе изменится на $R_d\,\delta I$, где $R_d = dU/dI$ — наклон ВАХ в этой точке. Уравнение пункта 5 минус равенство в рабочей точке:

$$L\frac{d\,\delta I}{dt} = -(R + R_d)\,\delta I.$$

ЭДС самоиндукции возвращает ток, если $R + R_d > 0$: тогда δI затухает. При $R + R_d < 0$ отклонение растёт.

- Холодная ветвь: $R_d = R_1 > 0$ — точка устойчива всегда.
- Гипербола: $R_d = \dfrac{d}{dI}\dfrac{P_0}{I} = -\dfrac{P_0}{I^2} < 0$. Устойчивость требует $R > P_0/I^2$, то есть $I > \sqrt{P_0/R}$. По теореме Виета $I_+ I_- = P_0/R$, поэтому $I_- < \sqrt{P_0/R} < I_+$: точка с *бо́льшим* током I_+ устойчива, с меньшим I_- — нет.
- Касание при $R = 25$ Ом: $R + R_d = 0$. Здесь $\mathcal{E} - IR - P_0/I = -(5I-1)^2/I \leqslant 0$ по обе стороны от точки: отклонение вверх по току возвращается, вниз — нет. Точка полуустойчива, на практике неустойчива.
- Излом при $R = 9$ Ом: с обеих сторон $R + R_d > 0$ ($9+1$ и $9-1$) — точка устойчива.

Обратите внимание: при $R < 9$ Ом единственная рабочая точка неустойчива. Стационарного режима нет — в такой цепи возникают релаксационные колебания: ток растёт по холодной ветви до 1 А, предохранитель перескакивает на горячую ветвь, ток спадает через катушку до 10 мА, предохранитель остывает и возвращается на холодную ветвь, и всё повторяется.



Как меняется ток вблизи рабочих точек при $R = 15$ Ом: по вертикали — $L\,dI/dt = \mathcal{E} - IR - U(I)$ для холодной ветви (чёрная) и гиперболы (бирюзовая). Где кривая выше нуля, ток растёт.

Пункт 3

10. Эквивалентный источник. Батарейки соединены последовательно: $\mathcal{E}_{\text{общ}} = 2 \cdot 4{,}5 = 9$ В, $r_{\text{общ}} = 2$ Ом. Внешняя часть цепи без предохранителя имеет сопротивление $R + r_{\text{общ}}$. Катушки в цепи нет, поэтому ток подстраивается под сопротивление предохранителя мгновенно, а медленно меняется только состояние предохранителя — его температура и доля перешедшего материала.

11. $R = 7$ **Ом.** Сразу после замыкания предохранитель холодный:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{общ}}}{R + r_{\text{общ}} + R_1} = \frac{9}{7 + 2 + 1} = 0{,}9 \text{ А}.$$

Выделяемая мощность $I^2 R_1 = 0{,}81$ Вт $< P_0 = 1$ Вт, и предохранитель нагревается только до $T = T_0 + I^2 R_1/\alpha = 101\ ^\circ\text{C} < T_{\text{пл}}$: он не срабатывает. Установится ток 0,9 А. (Точки на гиперболе, $9I^2 - 9I + 1 = 0$, у этой цепи тоже есть, но холодный предохранитель до них не доходит.)

12. $R = 2$ **Ом: нагрев.** Сопротивление внешней части $R + r_{\text{общ}} = 4$ Ом. После замыкания ток сразу

$$I_0 = \frac{9}{4 + 1} = 1{,}8 \text{ А} > I_1, \qquad I_0^2 R_1 = 3{,}24 \text{ Вт} > P_0.$$

Холодной рабочей точки нет: предохранитель греется, ток при этом остаётся 1,8 А (сопротивление R_1 не меняется). Через время порядка нескольких тепловых постоянных он доходит до 120 °C (сам по себе нагрелся бы до $T_0 + 3{,}24/\alpha = 344\ ^\circ\text{C}$).

13. $R = 2$ **Ом: переход.** При $T_{\text{пл}}$ начинается фазовый переход, сопротивление предохранителя $R_{\text{п}}$ растёт, ток $I = \mathcal{E}_{\text{общ}}/(4 \text{ Ом} + R_{\text{п}})$ падает. Мощность в предохранителе

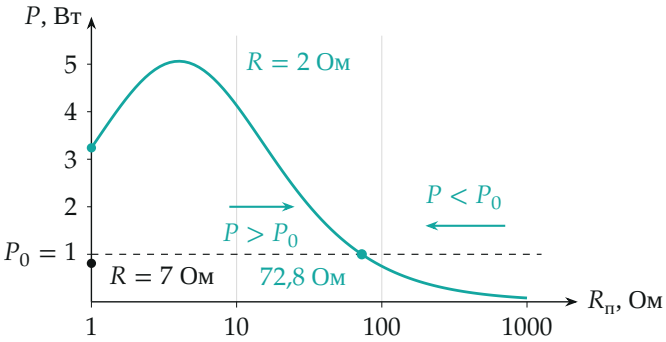
$$P(R_{\text{п}}) = \frac{\mathcal{E}_{\text{общ}}^2 R_{\text{п}}}{(4 \text{ Ом} + R_{\text{п}})^2}.$$

Пока $P > P_0$, лишнее тепло продвигает переход и $R_{\text{п}}$ растёт; при $P < P_0$ материал остывает обратно и $R_{\text{п}}$ уменьшается. Переход остановится при

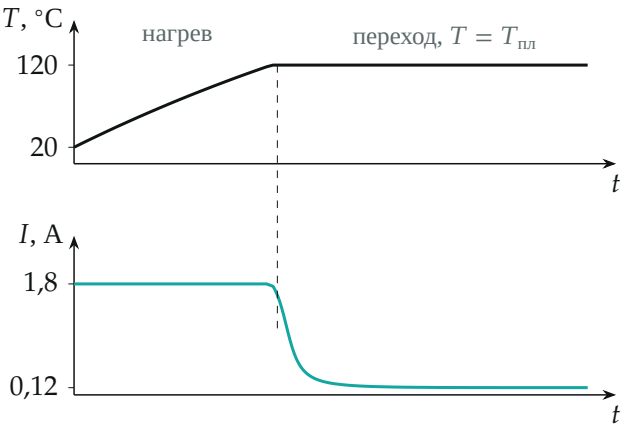
$P = P_0$:

$$81R_\text{п} = (4 + R_\text{п})^2 \quad \Rightarrow \quad R_\text{п}^2 - 73R_\text{п} + 16 = 0, \qquad R_\text{п} \approx 72{,}8 \text{ Ом}$$

(второй корень 0,22 Ом меньше R_1). Ток $I = 9/76{,}8 \approx 0{,}12$ А, напряжение на предохранителе $\approx 8{,}5$ В, температура $T_\text{пл}$. Это состояние устойчиво: при $R_\text{п} > 4$ Ом мощность P убывает с ростом $R_\text{п}$, и любое отклонение «само себя гасит» (рисунок ниже). На горячую ветвь предохранитель не уйдёт: для неё нужно $U > 100$ В.



Мощность в предохранителе в зависимости от его сопротивления при $R = 2$ Ом (ось $R_п$ логарифмическая). Переход идёт, пока $P > P_0$, и останавливается при $R_п = 72{,}8$ Ом. Чёрная точка — холодный предохранитель при $R = 7$ Ом: 0,81 Вт $< P_0$.



Температура и ток после замыкания ключа при $R = 2$ Ом (качественно; масштаб времени зависит от не заданных в условии теплоёмкости и теплоты перехода).

Обратите внимание: на ВАХ это точка I_- гиперболы, которая в цепи пункта 2 была неустойчивой. Там медленно менялся ток (большая L), и условие устойчивости — $R_{\text{внеш}} + R_d > 0$. Здесь медленно меняется состояние предохранителя, ток следует за ним мгновенно, и условие обратное: $R_{\text{внеш}} < |R_d| = R_{\text{п}}$ ($4 < 72{,}8$). Критерии организаторов ждут здесь релаксационных автоколебаний; в этой модели они возникли бы только с большой катушкой в цепи, как в пункте 2 (там при 4 Ом $<$ 9 Ом рабочая точка единственная и неустойчивая). После размыкания ключа предохранитель остывает, и сопротивление возвращается к 1 Ом.

Проверка. Размерности: $[\alpha(T_{\text{пл}} - T_0)] = \text{Вт}$, $[\sqrt{P_0/R_1}] = \sqrt{\text{Вт}/\text{Ом}} = \text{А}$. В состоянии пункта 13 $UI = 8{,}53\ \text{В} \cdot 0{,}117\ \text{А} \approx 1\ \text{Вт} = P_0$, как и положено на гиперболе. Численный расчёт цепи с теплоёмкостью и теплотой перехода подтверждает: без катушки — 0,117 А, с большой катушкой — автоколебания.

Физический смысл: на участке перехода предохранитель потребляет постоянную мощность 1 Вт при любом токе. Поэтому, сработав, он не размыкает цепь полностью, а пропускает ровно такой ток, чтобы самому оставаться горячим.

Ответ. 1) холодная ветвь $U = IR_1$ до $I_1 = 1$ А ($U_1 = 1$ В); участок перехода — гипербола $U = P_0/I$, $P_0 = \alpha(T_{\text{пл}} - T_0) = 1$ Вт, от 1 А до $I_2 = 10$ мА ($U_2 = 100$ В); горячая ветвь $U = IR_2$ при $U > 100$ В. 2) Устойчивость — при $R + dU/dI > 0$. $R > 25$ Ом: одна точка (холодная, устойчива); $R = 25$ Ом: две; $9 < R < 25$ Ом: три (холодная и с бо́льшим током на гиперболе устойчивы, с меньшим — нет); $R = 9$ Ом: две (излом 1 А, 1 В устойчив, 1/9 А — нет); $R < 9$ Ом: одна, неустойчивая. 3) При $R = 7$ Ом ток 0,9 А, предохранитель не срабатывает (101 °C). При $R = 2$ Ом ток сразу 1,8 А, предохранитель греется до 120 °C, идёт переход, ток падает до $\approx 0{,}12$ А ($R_{\text{п}} \approx 73$ Ом, $T = T_{\text{пл}}$) и держится; автоколебания (их ждут критерии) были бы только с большой катушкой.