Падающий в трубе магнит

Задача 5. [МОШ 2025/26, 11 класс, задача 5] При решении этой задачи могут оказаться полезными (а могут и не оказаться) некоторые или все из приведённых ниже формул.

Уравнения для осесимметричного магнитного поля в вакууме в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial r}=0.$$

Связь радиальной компоненты B_r осесимметричного поля с магнитным потоком $\Phi(z)$ через диск радиуса R, центр которого лежит на оси OZ в точке с координатой z, а плоскость перпендикулярна этой оси:

$$B_r(R,z)=-\frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{d\Phi}{dz}.$$

Осевая и радиальная составляющие поля магнитного диполя с моментом m (момент направлен вдоль оси OZ):

$$B_z(z,r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{m(2z^2-r^2)}{(z^2+r^2)^{5/2}}, \qquad B_r(z,r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{3mzr}{(z^2+r^2)^{5/2}}.$$

Поле в центре основания постоянного магнита цилиндрической формы (радиус основания a, высота h, магнитный момент m):

$$B_0=\frac{\mu_0 m}{2\pi a^2\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Значения некоторых несобственных интегралов:

$$\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^4}=\frac{\pi}{32a^5}, \qquad \int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^5}=\frac{5\pi}{256a^7}.$$

1. Рассмотрим тонкое кольцо радиуса R, изготовленное из проволоки сечением S ($S\ll R^2$). Проводимость материала кольца (величи-

на, обратная удельному сопротивлению) $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ известна. Кольцо движется с постоянной скоростью v вдоль оси OZ, которая совпадает с осью симметрии магнитного поля и самого кольца. Считая известными функции $B_z(z, r)$ и $B_r(z, r)$, задающие осевую и радиальную компоненты магнитной индукции, найдите силу, действующую на кольцо в точке с координатой z.

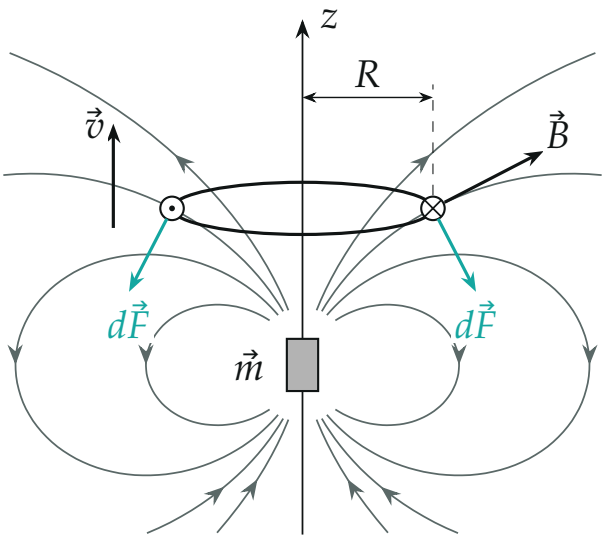
2. В начале координат закреплён небольшой магнит с моментом m, направленным вдоль оси OZ. Вдоль этой же оси движется очень длинная тонкостенная труба радиуса R с толщиной стенки d ($d \ll R$). Ось трубы совпадает с осью OZ, а её скорость v постоянна. Материал трубы имеет проводимость σ. Определите силу взаимодействия трубы и магнита.
3. В вертикальной медной трубе ($R = 1$ см, $d = 1$ мм) падает соосный трубе цилиндрический неодимовый магнит (радиус основания $a = 0{,}5$ см, высота $h = 2a$). Спустя некоторое время после начала падения скорость магнита становится постоянной. Определите эту установившуюся скорость, считая что поле вне магнита совпадает с полем точечного диполя, расположенного в его центре и обладающего тем же магнитным моментом. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

   Плотность материала магнита $\rho_м = 7{,}4$ г/см^3, проводимость меди $\sigma = 5{,}8 \cdot 10^7$ (Ом·м)$^{-1}$. Магнит создаёт поле $B_0 = 1$ Тл в центре своего основания. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Кольцо пересекает силовые линии неоднородного поля, поток через него меняется, в кольце течёт индукционный ток. На ток в магнитном поле действует сила Ампера, и по правилу Ленца она тормозит движение. Главная идея: и ЭДС, и тормозящую силу создаёт только *радиальная* составляющая поля B_r — та, которую «режет» проволока. Сила получается пропорциональной скорости, как вязкое трение. Трубу разбиваем на тонкие кольца и складываем силы, а падающий магнит тормозится трубой, пока эта «вязкая» сила не сравняется с весом.

Обозначения. Ось z — ось симметрии; r, φ — радиус и угол цилин-

дрической системы координат; $\Phi(z)$ — поток через кольцо (через диск радиуса R), положительное направление обхода кольца — против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z; $\mathcal{E}$ и I — ЭДС и ток в кольце в этом направлении; $R_к$ — сопротивление кольца; M — масса магнита.



Сечение плоскостью, проходящей через ось: линии поля диполя (серые, вычислены по $r = C\sin^2\theta$), кольцо радиуса R движется вверх. Справа ток уходит от нас ($\otimes$), слева идёт к нам ($\odot$); силы Ампера на противоположные элементы симметричны.

Пункт 1

1. ЭДС индукции. По закону Фарадея $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. Поле не меняется во времени, поток меняется только потому, что кольцо перемещается: за время dt оно сдвигается на $dz = v\,dt$, поэтому

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = v\,\frac{d\Phi}{dz}.$$

По формуле из условия $\dfrac{d\Phi}{dz} = -2\pi R\,B_r(R,z)$, откуда

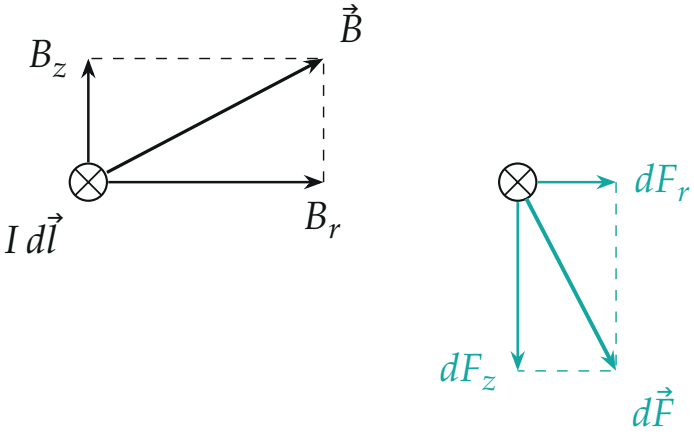
$$\mathcal{E} = 2\pi R\,B_r\,v.$$

Тот же результат даёт и сила Лоренца: проволока со скоростью v вдоль оси «режет» радиальную составляющую поля, на длине dl возникает ЭДС $vB_r\,dl$, а по всей длине $2\pi R$ — $2\pi R v B_r$. Осевая составляющая B_z параллельна скорости и ЭДС не даёт.

2. Ток. Сопротивление проволоки длиной $2\pi R$ и сечением S: $R_к = 2\pi R/(\sigma S)$. По закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_к} = \frac{2\pi R B_r v \cdot \sigma S}{2\pi R} = \sigma S B_r v.$$

Самоиндукцию кольца не учитываем: собственное поле индукционных токов мало по сравнению с полем магнита (подробнее — в конце решения).



Элемент кольца справа (ток от нас). Слева — разложение поля, справа — сила Ампера $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ и её составляющие: осевую $dF_z = -IB_r\,dl$ создаёт B_r, радиальную — B_z.

3. Сила Ампера. На элемент кольца длиной dl действует $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$. Элемент направлен по касательной к кольцу, поле разложим на две составляющие (рисунок выше).

- B_z (вдоль оси) даёт силу $IB_z\,dl$ по радиусу. У противоположных элементов кольца эти силы направлены противоположно и в сумме дают ноль: кольцо лишь чуть растягивается или сжимается.

- B_r (по радиусу) даёт силу $IB_r\,dl$ вдоль оси. У всех элементов она одинакова, и при суммировании по кольцу просто умножается на длину $2\pi R$.

Получаем силу вдоль оси:

$$F = IB_r \cdot 2\pi R = 2\pi R\,\sigma S\,B_r^2\,v.$$

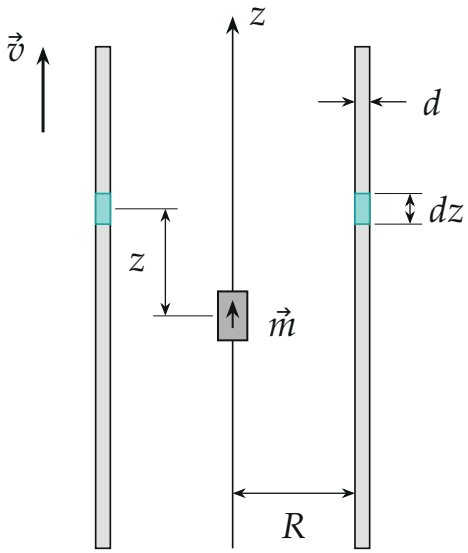
4. Направление. По правилу Ленца индукционный ток мешает причине своего появления — движению кольца относительно магнита. Значит, сила направлена против скорости, в векторном виде $\vec{F} = -2\pi R\sigma S B_r^2\,\vec{v}$. Это видно и из знаков: при $v > 0$ ток $I = \sigma S B_r v$ того же знака, что B_r, и проекция $dF_z = -IB_r\,dl < 0$. Сила пропорциональна B_r^2, поэтому она тормозит при любом знаке B_r — и над магнитом, и под ним.

Обратите внимание: в ЭДС и в силу входит только радиальная составляющая поля. Осевую составляющую B_z, которая обычно «главная» в поле магнита на оси, здесь можно вообще не знать.

Пункт 2

5. Труба как набор колец. Мысленно разрежем трубу на кольца высотой dz. Каждое кольцо — проволока длиной $2\pi R$ с сечением $S = d\,dz$; соседние кольца на токи друг друга не влияют (токи текут по окружностям, вдоль оси ток не идёт). Магнит неподвижен, кольца движутся со скоростью v, и к каждому применим результат пункта 1:

$$dF = 2\pi R\,\sigma\,d\,dz\,B_r^2(z, R)\,v.$$



Труба (толщина стенки d увеличена) разрезана на кольца высотой dz; выделено кольцо на высоте z над магнитом.

6. Суммируем по всей трубе. Труба очень длинная, поэтому суммируем от $z = -\infty$ до $z = +\infty$. На стенке $r = R$ поле диполя

$$B_r(z, R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3mzR}{(z^2 + R^2)^{5/2}}, \qquad B_r^2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \frac{9m^2R^2z^2}{(z^2 + R^2)^5}.$$

Подынтегральная функция чётная, а интеграл от 0 до ∞ дан в условии (второй, с $a = R$):

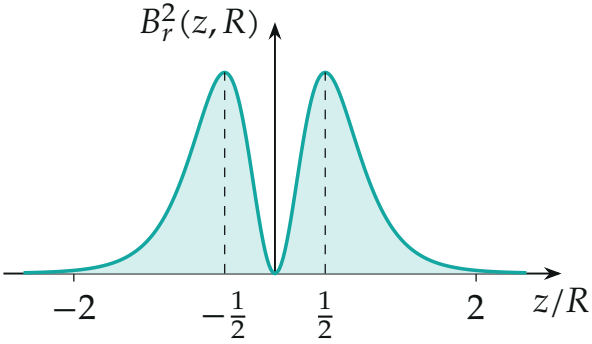
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(z^2 + R^2)^5} = 2 \cdot \frac{5\pi}{256R^7} = \frac{5\pi}{128R^7}.$$

Собираем:

$$F = 2\pi R\,\sigma d\,v \cdot \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \cdot 9m^2R^2 \cdot \frac{5\pi}{128R^7} = \frac{45\,\mu_0^2 m^2 \sigma d}{1024\,R^4}\,v.$$

Сила, действующая на трубу, направлена против её скорости. По третьему закону Ньютона на магнит действует такая же сила, направленная по

скорости трубы: труба «тащит» магнит за собой.

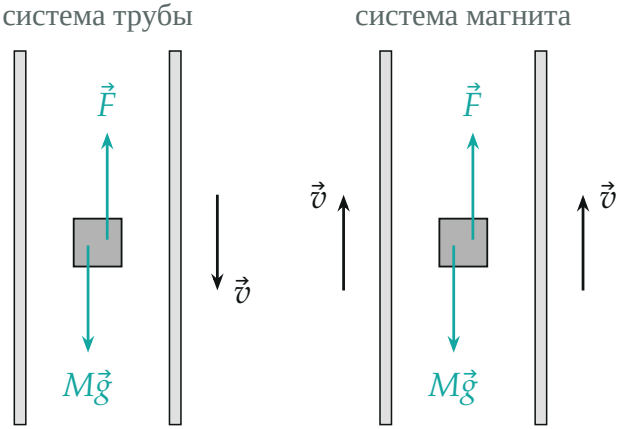


Квадрат радиальной составляющей поля диполя на стенке трубы (в долях максимума). Тормозят в основном кольца на расстоянии порядка R от магнита; максимум — при $|z| = R/2$, над самим магнитом $B_r = 0$.

Пункт 3

7. Условие установившегося движения. Пока магнит разгоняется, тормозящая сила растёт вместе со скоростью; когда она сравнялась с силой тяжести, ускорение стало нулевым. Перейдём в систему отсчёта магнита: при постоянной скорости она инерциальная, магнит в ней покоится, а труба движется вверх со скоростью v — это в точности пункт 2. Второй закон Ньютона для магнита (сопротивления воздуха нет):

$$Mg = \frac{45\,\mu_0^2 m^2 \sigma d}{1024\,R^4}\,v.$$



Установившееся падение. Слева — в системе трубы магнит падает со скоростью $\vec{v}$; справа — в системе магнита он покоится, а труба движется вверх, как в пункте 2. Силы на магнит уравновешены.

8. Масса и магнитный момент. Масса цилиндра $M = \rho_м \pi a^2 h = 2\pi\rho_м a^3$. Магнитный момент найдём из поля в центре основания при $h = 2a$, $\sqrt{a^2+h^2} = \sqrt{5}\,a$:

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{2\sqrt{5}\,\pi a^3} \quad\Rightarrow\quad m = \frac{2\sqrt{5}\,\pi a^3 B_0}{\mu_0}, \qquad \mu_0^2 m^2 = 20\pi^2 a^6 B_0^2.$$

9. Скорость. Из пункта 7

$$v = \frac{1024\,R^4 M g}{45\,\mu_0^2 m^2 \sigma d} = \frac{1024\,R^4 \cdot 2\pi\rho_м a^3 g}{45\cdot 20\pi^2 a^6 B_0^2\,\sigma d} = \frac{512}{225\pi}\cdot\frac{\rho_м g R^4}{\sigma d B_0^2 a^3}.$$

Числа: $m \approx 1{,}40$ А $\cdot$ м^2, $M \approx 5{,}8$ г, коэффициент «вязкости» $F/v = 45\mu_0^2 m^2\sigma d/(1024R^4) \approx 0{,}79$ Н $\cdot$ с/м,

$$v = \frac{512}{225\pi}\cdot\frac{7400\cdot 10\cdot(10^{-2})^4}{5{,}8\cdot 10^7\cdot 10^{-3}\cdot 1^2\cdot(5\cdot 10^{-3})^3}\ \text{м/с} \approx 0{,}074\ \text{м/с} = 7{,}4\ \text{см/с}.$$

Проверка. Размерность пункта 1: так как Тл · м^2/с = В,

$$[R\sigma SB^2 v] = \text{м} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{Ом} \cdot \text{м}} \cdot \text{Тл}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

- Энергия, второй способ: мощность силы торможения должна равняться джоулеву теплу в кольце,

$$Fv = 2\pi R\sigma S B_r^2 v^2, \qquad \frac{\mathcal{E}^2}{R_\text{к}} = \frac{(2\pi R B_r v)^2 \sigma S}{2\pi R} = 2\pi R\sigma S B_r^2 v^2.$$

  Совпало.
- Зависимости: $v \propto R^4$ — в широкой трубе поле у стенки слабее и торможение меньше; $v \propto 1/\sigma$ — в пластиковой трубе ($\sigma \to 0$) магнит просто падает. Численный интеграл $\int B_r^2\, dz$ (python) совпал с формулой пункта 6.
- Самоиндукцией мы пренебрегли: поле индукционных токов относится к полю магнита как $\mu_0 \sigma v R \approx 0{,}05$ — действительно мало.

Физический смысл: в медной трубе магнит падает медленно и равномерно — со скоростью около 7 см/с и метровую трубу проходит примерно за 14 с. Его кинетическая энергия не растёт: вся работа силы тяжести уходит в тепло вихревых токов в стенках трубы.

Ответ. 1) $F = 2\pi R\,\sigma S\,B_r^2(R, z)\,v$, сила направлена против скорости кольца; 2) $F = \dfrac{45\,\mu_0^2 m^2 \sigma d}{1024\,R^4}\,v$ (на трубу — против её скорости, на магнит — по скорости трубы); 3) $v = \dfrac{512}{225\pi} \cdot \dfrac{\rho_\text{м} g R^4}{\sigma d B_0^2 a^3} \approx 7{,}4$ см/с.