Тонны песка

Задача 1. [МОШ 2025/26, 7 класс, задача 1] В пустой контейнер засыпают песок с помощью двух конвейерных лент. Длина каждой ленты составляет $L = 30$ м. Первая лента движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с, с неё в контейнер каждую секунду ссыпается $m_1 = 20$ кг песка. Вторая лента движется со скоростью $v_2 = 2$ м/с, с неё в контейнер каждую секунду поступает $m_2 = 10$ кг песка. Ленты включают одновременно, в начальный момент они пусты. Песок начинают подавать на ленты на расстоянии L от контейнера сразу после их включения.

1. За какое наименьшее время после включения лент в контейнер будет загружено $M = 4$ т песка?
2. Сколько килограммов песка поступит в контейнер с каждой ленты к моменту окончания загрузки?

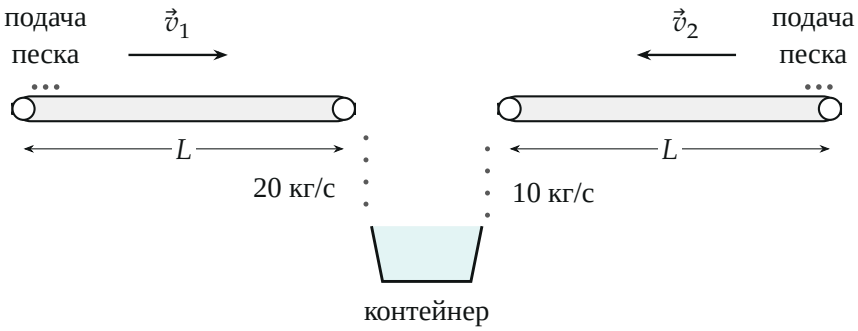


Схема установки: песок подают на дальние концы лент, он едет к контейнеру и ссыпается в него.

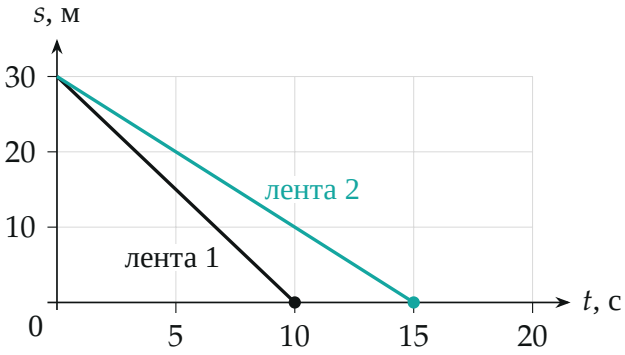
▲ **Решение. Что происходит.** Песок попадает на ленту в момент включения, но в контейнер он приезжает не сразу: сначала едет по ленте путь L. Пока первая порция не доехала, с ленты ничего не ссыпается. Дальше с каждой ленты в контейнер идёт ровный поток — столько килограммов в секунду, сколько указано в условии. Потоки начинаются в разные моменты, потому что скорости лент разные. Главная идея — считать массу песка от каждой ленты только за то время, пока эта лента уже ссыпает песок.

Обозначения. t_1 и t_2 — моменты, когда первый песок доезжает до контейнера по первой и второй ленте; T — время от включения лент до конца загрузки; M_1 и M_2 — массы песка, которые пришли с первой и со второй ленты за время T.

1. Когда песок начинает поступать. Песок подают на ленту сразу после включения и на расстоянии L от контейнера. Он едет вместе с лентой равномерно, поэтому время в пути равно длине, делённой на скорость:

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{30}{3}\ \text{с} = 10\ \text{с}, \qquad t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{30}{2}\ \text{с} = 15\ \text{с}.$$

Песок на ленту подают непрерывно, поэтому после момента t_i с ленты каждую секунду ссыпается одна и та же масса m_i. До t_1 в контейнер не попадает ничего, между t_1 и t_2 песок идёт только с первой ленты.



Расстояние s от первой порции песка до контейнера уменьшается с постоянной скоростью. Прямые доходят до нуля в моменты $t_1 = 10$ с и $t_2 = 15$ с.

2. Сколько песка пришло с каждой ленты. К моменту T первая лента ссыпала песок в течение $T - t_1$, вторая — в течение $T - t_2$ (считаем, что $T > t_2$; ниже это проверим):

$$M_1 = m_1\,(T - t_1), \qquad M_2 = m_2\,(T - t_2).$$

3. Условие окончания загрузки. Контейнер получает песок только с

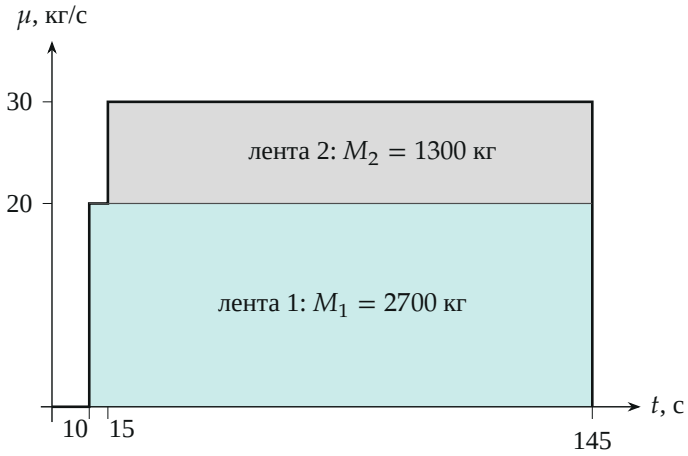
этих двух лент, поэтому общая масса $M = M_1 + M_2$:

$$m_1(T - t_1) + m_2(T - t_2) = M.$$

Раскроем скобки и выразим T:

$$(m_1 + m_2)\,T = M + m_1 t_1 + m_2 t_2,$$
$$T = \frac{M + m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{4000 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 15}{20 + 10}\ \text{с} = 145\ \text{с}.$$

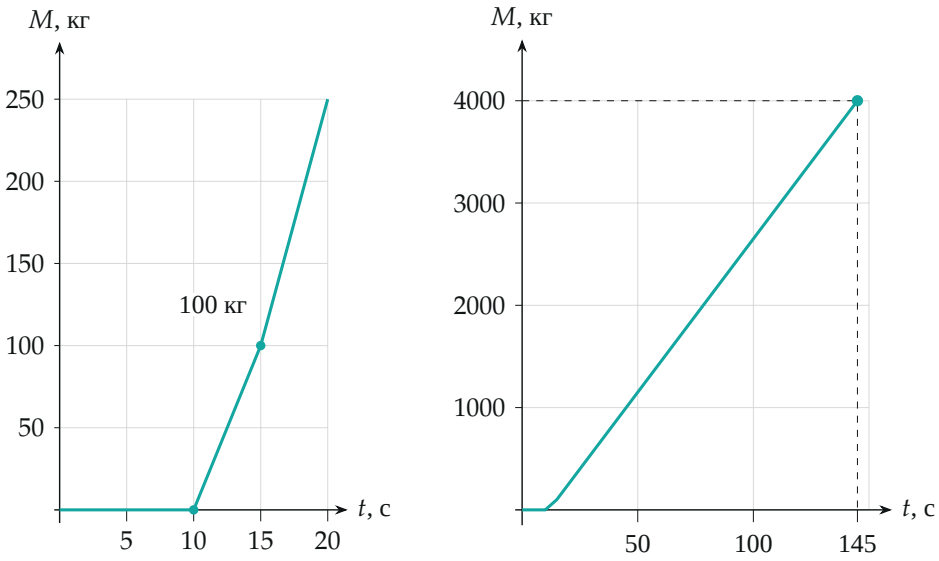
Загрузка идёт ещё долго после $t_2 = 15$ с, значит, допущение $T > t_2$ верное. Это наименьшее время: ленты работают на полную мощность, быстрее песок не поступает.



Поток песка в контейнер μ в зависимости от времени. Площадь под графиком — масса песка: бирюзовая часть — первая лента, серая — вторая. Вместе они дают $2700 + 1300 = 4000$ кг.

4. Что пришло с каждой ленты.

$$M_1 = 20 \cdot (145 - 10)\ \text{кг} = 2700\ \text{кг}, \qquad M_2 = 10 \cdot (145 - 15)\ \text{кг} = 1300\ \text{кг}.$$



Масса песка в контейнере. Слева — первые 20 с в крупном масштабе: до 10 с контейнер пуст, до 15 с наклон меньше (работает одна лента), потом больше (две ленты). Справа — вся загрузка: прямая доходит до 4000 кг в момент 145 с.

Обратите внимание. Нельзя писать $m_1T + m_2T = M$ — это значит считать, что обе ленты ссыпают песок с самой секунды включения. Так получилось бы $T = 4000/30 \approx 133{,}3$ с, и ответ оказался бы занижен: песок *едет* по ленте, и первые 10 с (по первой ленте) и 15 с (по второй) контейнер его не получает.

Проверка. Единицы: кг/с · с = кг; $M_1 + M_2 = 4000$ кг. Второй способ: если бы обе ленты работали с нулевой секунды, понадобилось бы $4000/30 \approx 133{,}3$ с. Реально теряется масса, которую ленты не успели ссыпать за время доставки, — $20 \cdot 10 + 10 \cdot 15 = 350$ кг, а на её добор при полном потоке 30 кг/с нужно $350/30 \approx 11{,}7$ с: $133{,}3 + 11{,}7 = 145$ с.

Смысл такой: загрузка состоит из «разгона» (пока песок едет) и ровного потока в 30 кг/с, и чем длиннее лента и медленнее она движется, тем дольше разгон.

Ответ. 1) $T = 145$ с; 2) $M_1 = 2700$ кг, $M_2 = 1300$ кг.