Радиус Шварцшильда

Задача 1. [МОШ 2025/26, заключительный этап, 7 класс, задача 2] При решении задачи могут понадобиться следующие справочные данные: гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$; скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; радиус Земли $R_3 = 6{,}4 \cdot 10^6$ м; ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = G\dfrac{M_3}{R_3^2} = 10\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (здесь M_3 — масса Земли). Приведённые обозначения физических констант остаются неизменными на протяжении всей задачи.

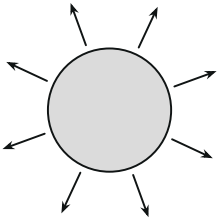
Согласно общей теории относительности, если сжать сферическое тело равномерной плотности до радиуса, меньшего некоторого критического значения R_g, то гравитация на его поверхности станет настолько сильной, что даже свет не сможет покинуть это тело — оно превратится в чёрную дыру. Этот критический радиус, называемый гравитационным, или радиусом Шварцшильда, вычисляется по формуле:

$$R_g = 2 \cdot m^\alpha \cdot G^\beta \cdot c^\gamma,$$

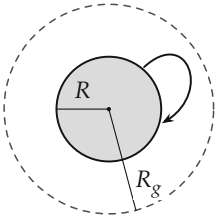
где m — масса тела, α, β и γ — некоторые безразмерные постоянные. Никакие другие характеристики тела (плотность, химический состав и т.п.) на значение R_g не влияют.

1. Пользуясь соображениями размерности, определите значения постоянных α, β и γ.
2. До какого радиуса необходимо сжать Землю, согласно приведённой теории, чтобы она превратилась в чёрную дыру?

▲ **Решение. Что происходит.** Радиус Шварцшильда — это длина, а справа в формуле стоят масса тела и две мировые константы G и c. Главная идея: степенное произведение $m^\alpha G^\beta c^\gamma$ должно иметь ту же размерность, что и длина. Это даёт по одному уравнению для каждой из основных единиц (килограмм, метр, секунда) и позволяет найти три показателя. Множитель 2 размерности не имеет, его в условии уже дали.



$R > R_g$: свет уходит



$R < R_g$: чёрная дыра

Пока радиус тела больше R_g, свет уходит с поверхности; тело, сжатое внутрь сферы радиуса R_g, свет не выпускает.

Обозначения. Размерности: массы M, длины L, времени T. Тогда

$$[m] = \mathrm{M}, \qquad [G] = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}, \qquad [c] = \mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1}, \qquad [R_g] = \mathrm{L}.$$

Пункт 1. Показатели α, β, γ.

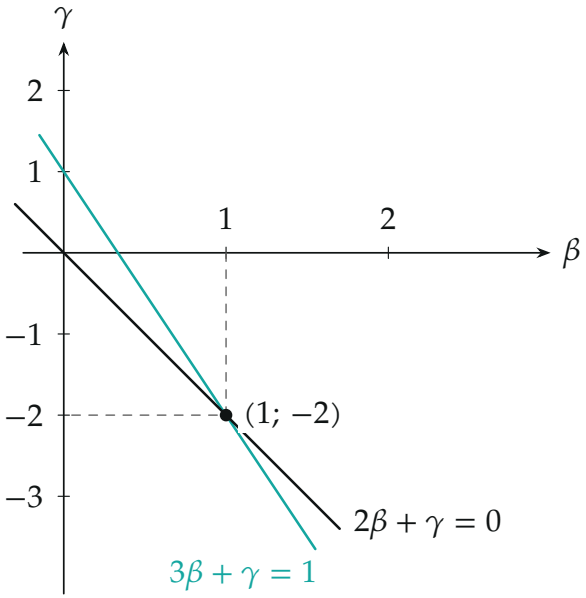
1. Размерность правой части. Размерность произведения равна произведению размерностей сомножителей, возведённых в свои степени:

$$\left[m^\alpha G^\beta c^\gamma\right] = \mathrm{M}^\alpha \cdot \mathrm{L}^{3\beta}\mathrm{M}^{-\beta}\mathrm{T}^{-2\beta} \cdot \mathrm{L}^\gamma\mathrm{T}^{-\gamma} = \mathrm{M}^{\alpha-\beta}\,\mathrm{L}^{3\beta+\gamma}\,\mathrm{T}^{-2\beta-\gamma}.$$

2. Приравниваем к размерности длины $\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^0$. Показатели при каждой из трёх единиц должны совпасть:

$$\mathrm{M}: \ \alpha - \beta = 0, \qquad \mathrm{L}: \ 3\beta + \gamma = 1, \qquad \mathrm{T}: \ -2\beta - \gamma = 0.$$

3. Решаем систему. Килограммы входят только в m и G, поэтому первое уравнение даёт $\alpha = \beta$. Из третьего $\gamma = -2\beta$. Подставляем во второе: $3\beta - 2\beta = 1$, то есть $\beta = 1$. Отсюда $\alpha = 1$ и $\gamma = -2$.



Уравнения для L *и* T *в плоскости* (β, γ) *— две прямые, пересекающиеся в точке* $\beta = 1$, $\gamma = -2$.

Обратите внимание: размерный анализ не определяет безразмерный множитель, поэтому число 2 перед формулой взято из условия, а не найдено.

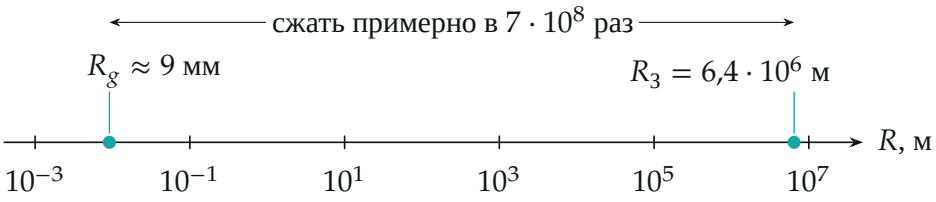
Пункт 2. Радиус Земли.

4. Исключаем массу Земли. Масса M_3 в справочных данных не дана, зато дано $g = GM_3/R_3^2$, откуда $GM_3 = gR_3^2$. Подставим в формулу, где $m = M_3$:

$$R_g = \frac{2GM_3}{c^2} = \frac{2gR_3^2}{c^2}.$$

5. Считаем.

$$R_g = \frac{2 \cdot 10 \cdot \left(6{,}4 \cdot 10^6\right)^2}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}\ \text{м} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 4{,}1 \cdot 10^{13}}{9 \cdot 10^{16}}\ \text{м} \approx 9{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$



Радиус Земли и её гравитационный радиус на логарифмической шкале длин.

Обратите внимание: ни масса Земли, ни G по отдельности для ответа не нужны, потому что в формуле они всегда стоят вместе: $GM_З = gR_З^2$.

Проверка. Размерность: $[Gm/c^2] = \dfrac{\mathrm{L^3M^{-1}T^{-2}\cdot M}}{\mathrm{L^2T^{-2}}} = \mathrm{L}$. Второй способ: вторая космическая скорость тела массой m и радиусом R в механике Ньютона равна $\sqrt{2Gm/R}$; приравняв её скорости света c, получаем $R = 2Gm/c^2$ — ту же формулу.

Физический смысл: чтобы Земля стала чёрной дырой, её надо сжать до размера горошины.

Ответ. 1) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$, то есть $R_g = \dfrac{2Gm}{c^2}$; 2) $R_g = \dfrac{2gR_З^2}{c^2} \approx 9{,}1$ мм.