# Система с поджатыми пружинами

**Задача 1.** [МОШ 2025/26, заключительный этап, 7 класс, задача 3] В системе, изображённой на рисунке 1, невесомая и нерастяжимая нить перекинута через два подвижных невесомых блока. Её правый конец прикреплён к неподвижной горизонтальной стенке, а левый конец — к поджатой пружине жёсткостью $k_1 = k$. Ось правого блока прикреплена к поджатой пружине жёсткостью $k_2 = 4k$. Пороговые значения сил поджатия обеих пружин одинаковы и равны $F_0$. Верхние концы пружин жёстко закреплены. В начальный момент времени левый блок начинают равномерно опускать, так что его ось движется с постоянной скоростью $v$. Известно, что величина силы, прикладываемой к оси блока, в начальный момент равна $F_0$. Считайте, что нить не проскальзывает по блокам, трение в осях блоков отсутствует.

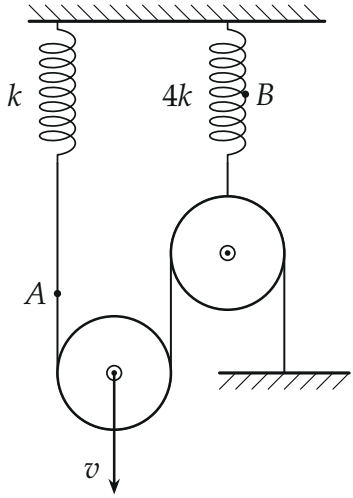



*Рис. 1*

1. Определите скорости точки $A$ нити и точки $B$ (середины правой пружины) через время $t$ после начала движения.
2. Найдите зависимость от времени силы $F$, которую необходимо прикладывать к оси левого блока, чтобы он двигался вниз с постоянной скоростью $v$.

Примечание. Обе поджатые пружины устроены так: они не деформируются, пока приложенная к ним сила не превысит пороговое значение $F_0$. Как только сила становится больше $F_0$, пружина начинает растягиваться (или сжиматься), причём её жёсткость $k_i$ определяет связь между изменением силы упругости и деформацией:

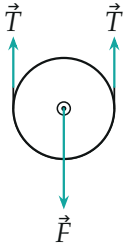
$$k_i = \frac{F - F_0}{x_i}, \quad i = 1, 2,$$

где $x_i$ — абсолютная величина деформации (изменение длины) пружины.

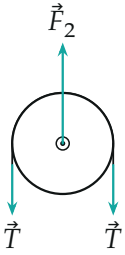
▲ **Решение. Что происходит.** Нить одна, блоки и нить невесомые, поэтому сила натяжения $T$ одинакова вдоль всей нити, а силы на блоки связаны простыми множителями: на каждом блоке нить тянет дважды. Пока $T$ мала, деформируется только та пружина, у которой сила раньше дошла до порога $F_0$. Главная идея — свести задачу к двум этапам: на каждом свои связи между скоростями, и нерастяжимость нити даёт одно уравнение на смещения.

**Обозначения.** Ось $y$ направим вниз, отсчёт смещений — от начального положения. $y = vt$ — смещение оси левого блока; $z$ — смещение оси правого блока, оно равно деформации второй пружины (её верхний конец закреплён, нижний — ось блока); $a$ — смещение нижнего конца первой пружины вместе с точкой $A$ нити, оно равно деформации первой пружины. Силы упругости: $F_1$ у первой пружины, $F_2$ у второй.

**1. Силы на блоках.** Блоки невесомые, значит, сумма сил на каждый из них равна нулю.




левый блок




правый блок

*Силы на невесомые блоки: у каждого нить действует двумя силами $\vec{T}$.*

Для левого блока в проекции на вертикаль: $F = 2T$. Для правого блока: пружина тянет вверх с силой $F_2$, обе ветви нити тянут вниз, $F_2 = 2T$. Нижний конец нити прикреплён к первой пружине, у невесомой нити там тоже $T$, поэтому $F_1 = T$. Итак,

$$F = F_2 = 2T, \qquad F_1 = T.$$

**2. Что происходит в начале.** По условию $F(0) = F_0$, поэтому $F_2(0) = F_0$, а $T(0) = F_0/2$ и $F_1(0) = F_0/2 < F_0$. Вторая пружина стоит ровно на пороге и начинает растягиваться, как только сила чуть вырастет. Первая пружина пока не деформируется, ей до порога $F_0$ далеко.

**3. Связь смещений.** Длина нити постоянна. Левый вертикальный участок удлиняется на $y - a$ (ось блока ушла вниз на $y$, конец пружины — на $a$), средний участок — на $y - z$ (левый блок опустился на $y$, правый на $z$), правый участок укорачивается на $z$ (стенка неподвижна). Сумма изменений равна нулю:

$$(y - a) + (y - z) - z = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 2z = 2y.$$

Дифференцируем по времени: скорости связаны так же, $v_A + 2v_z = 2v$, где $v_A = \dot{a}$ — скорость точки $A$ (она едет вместе с нитью и с концом пружины), $v_z = \dot{z}$ — скорость оси правого блока.

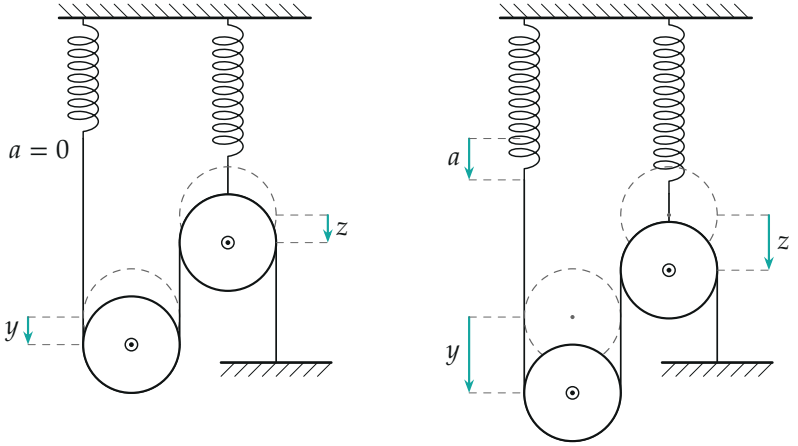
**4. Этап I: пружина 1 не деформируется,** $a = 0$**.** Тогда $v_A = 0$, и из связи скоростей $v_z = v$. Правая пружина растягивается равномерно, $z = vt$, её середина — точка $B$ — движется вдвое медленнее конца: $v_B = v_z/2 = v/2$. Растяжение второй пружины сверх порога $x_2 = z$, поэтому

$$F_2 = F_0 + 4k\,vt, \qquad F = F_2 = F_0 + 4kvt.$$

Первая пружина деформироваться начнёт, когда $F_1 = T = F_2/2$ дойдёт до $F_0$, то есть при $F_2 = 2F_0$:

$$F_0 + 4kvt_1 = 2F_0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{F_0}{4kv}.$$

Обратите внимание: порог первой пружины достигается не при $F = F_0$, а при $F = 2F_0$, ведь она нагружена силой $T$ вдвое меньшей, чем $F_2$.




а) $t < t_1$ б) $t > t_1$

*Смещения; штриховые окружности — начальные положения блоков.*

**5. Этап II, $t > t_1$: растягиваются обе пружины.** Теперь $F_1 = F_0 + ka$, $F_2 = F_0 + 4kz$ и $F_2 = 2F_1$:

$$F_0 + 4kz = 2\,(F_0 + ka) \quad \Rightarrow \quad a = 2z - \frac{F_0}{2k}.$$

Вместе со связью $a = 2y - 2z$ получаем $2z - \dfrac{F_0}{2k} = 2y - 2z$, то есть

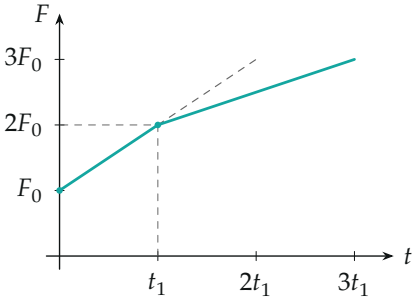
$$z = \frac{y}{2} + \frac{F_0}{8k}, \qquad a = y - \frac{F_0}{4k}.$$

Скорости: $v_A = \dot{a} = v$, $v_z = \dot{z} = v/2$, значит $v_B = v_z/2 = v/4$. Сила, прикладываемая к оси: $F = 2T = 2F_1 = 2(F_0 + ka)$, откуда

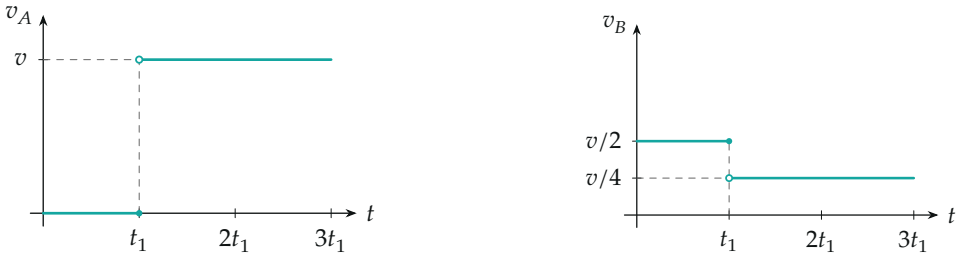
$$F = 2\left(F_0 + kvt - \frac{F_0}{4}\right) = \frac{3}{2}F_0 + 2kvt.$$

Обратите внимание: формула этапа II верна только при $t > t_1$; при меньших $t$ получилось бы $a < 0$, чего у пружины с порогом не бывает.

**6. Графики.** После $t_1$ сила растёт медленнее, а скорости — ступени.




*Сила $F$ в зависимости от времени: $F = F_0 + 4kvt$ при $t \le t_1$ и $F = \frac{3}{2}F_0 + 2kvt$ при $t > t_1$; штриховая прямая — продолжение первого участка.*




*Скорости точек $A$ и $B$ в зависимости от времени.*

**Проверка.** В момент $t_1 = F_0/(4kv)$ обе формулы дают одно и то же: $F_0 + 4kvt_1 = 2F_0$ и $\frac{3}{2}F_0 + 2kvt_1 = 2F_0$. Скорости и смещения тоже сходятся: при $t = t_1$ получаем $a = 0$ и $z = y = F_0/(4k)$. Второй способ для этапа II — по приращениям: $dF_2 = 4k\,dz$, $dF_1 = k\,da$ и $dF_2 = 2\,dF_1$ дают $dz = dF_1/(2k)$; из $da = 2\,dy - 2\,dz$ следует $dF_1 = 2k\,dy - dF_1$, то есть $dF_1 = k\,dy$ и $dF = 2\,dF_1 = 2kv\,dt$ — тот же наклон $2kv$.

Смысл: первую пружину нагружает вдвое меньшая сила, поэтому сначала растягивается только вторая; после $t_1$ растягиваются обе, система мягче, и сила растёт медленнее.

**Ответ.** 1) при $t \le t_1 = F_0/(4kv)$: $v_A = 0$, $v_B = v/2$; при $t > t_1$: $v_A = v$, $v_B = v/4$ (все скорости направлены вниз); 2) $F = F_0 + 4kvt$ при $t \le t_1$ и $F = \frac{3}{2}F_0 + 2kvt$ при $t > t_1$.