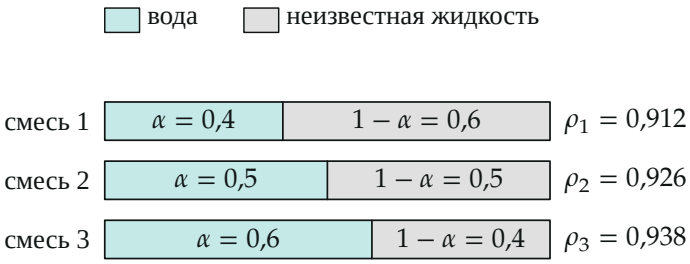
Определение плотности

Задача 1. [МОШ 2025/26, заключительный этап, 7 класс, задача 4] В лаборатории имеется ареометр, который позволяет измерять плотность только в диапазоне от 0,90 г/см^3 до 1,20 г/см^3. Для определения плотности ρ_x неизвестной жидкости, которая легче воды, используется метод смешивания. Готовят три смеси с объёмными долями воды: 0,40, 0,50 и 0,60 (эти значения известны точно). Измерения дают следующие значения плотности смесей: $\rho_1 = 0{,}912$ г/см^3, $\rho_2 = 0{,}926$ г/см^3 и $\rho_3 = 0{,}938$ г/см^3. Абсолютная погрешность каждого измерения $\Delta\rho = 0{,}005$ г/см^3. Плотность воды принята равной $\rho = 1{,}000$ г/см^3 точно (эталонное значение).

1. Для каждой смеси вычислите плотность исходной жидкости ρ_x и определите абсолютную погрешность каждого полученного значения. Считайте, что объём смеси равен сумме объёмов смешиваемых жидкостей.
2. Оцените, в каком интервале может находиться истинное значение ρ_x по результатам трёх измерений с учётом их погрешностей.
3. Если бы у вас была возможность провести только одно измерение, какую объёмную долю воды α нужно было бы выбрать, чтобы погрешность определения ρ_x была наименьшей? Учтите, что плотность смеси должна попадать в рабочий диапазон ареометра. Чему равна эта минимальная погрешность? Считайте абсолютную погрешность определения плотности ареометром равной $\Delta\rho$ для любого значения объёмной доли воды.

▲ **Решение. Что происходит.** Воду и неизвестную жидкость смешивают в известном отношении объёмов, а ареометр показывает плотность смеси. Масса смеси равна сумме масс, объём — сумме объёмов, поэтому плотность смеси есть среднее плотностей жидкостей с весами, равными объёмным долям. Отсюда ρ_x выражается через измеренное ρ_i линейно, и главная идея задачи: множитель при ρ_i в этой формуле усиливает погрешность прибора, а его величина зависит от доли воды.



Состав трёх смесей по объёму и измеренные плотности.

Обозначения. α — объёмная доля воды в смеси (известна точно), $\rho = 1{,}000$ г/см^3 — плотность воды, ρ_x — плотность жидкости, ρ_i — измеренная плотность i-й смеси, $\Delta\rho_x$ — погрешность, с которой из i-го опыта найдено ρ_x.

Пункт 1. Плотность жидкости и её погрешность.

1. Плотность смеси. Возьмём смесь объёмом V. Вода занимает объём αV, жидкость — $(1-\alpha)V$ (объём смеси равен сумме объёмов). Масса смеси равна сумме масс воды и жидкости:

$$\rho_i V = \rho\,\alpha V + \rho_x(1-\alpha)V \quad\Rightarrow\quad \rho_i = \alpha\rho + (1-\alpha)\rho_x.$$

2. Выражаем искомую плотность.

$$\rho_x = \frac{\rho_i - \alpha\rho}{1-\alpha}.$$

3. Погрешность. Величины α и ρ известны точно, поэтому погрешность ρ_x целиком идёт от измерения ρ_i. Формула линейна по ρ_i с множителем $1/(1-\alpha)$: изменение ρ_i на $\Delta\rho$ меняет ρ_x на

$$\Delta\rho_x = \frac{\Delta\rho}{1-\alpha}.$$

4. Считаем для трёх смесей (в г/см^3):

α	ρ_i	$\rho_x = \dfrac{\rho_i - \alpha\rho}{1-\alpha}$	$\Delta\rho_x = \dfrac{0{,}005}{1-\alpha}$
0,40	0,912	0,853	0,008
0,50	0,926	0,852	0,010
0,60	0,938	0,845	0,0125

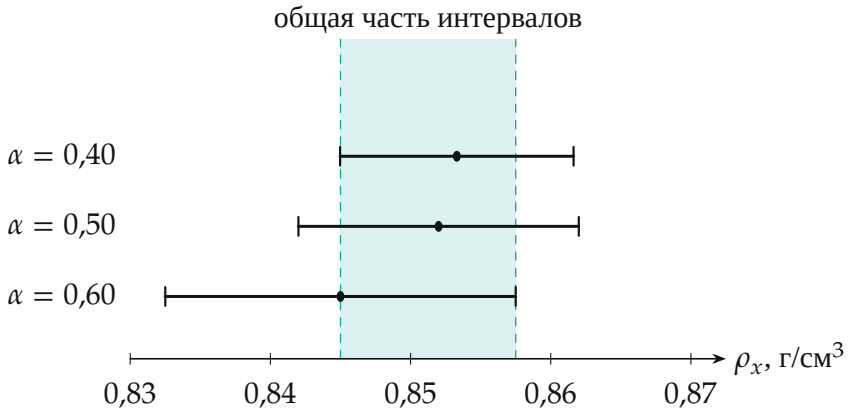
Погрешность растёт с долей воды: чем меньше в смеси неизвестной жидкости, тем сильнее увеличивается ошибка прибора при пересчёте.

Пункт 2. Интервал для ρ_x.

5. Интервалы отдельных измерений. Каждый опыт даёт ρ_x с погрешностью, то есть истинное значение лежит в интервале $[\rho_{xi} - \Delta\rho_{xi};\ \rho_{xi} + \Delta\rho_{xi}]$:

$$[0{,}845;\ 0{,}862],\qquad [0{,}842;\ 0{,}862],\qquad [0{,}8325;\ 0{,}8575].$$

6. Общая часть. Все три измерения верны в пределах своих погрешностей, поэтому истинное ρ_x лежит в каждом из интервалов сразу, то есть в их пересечении: нижняя граница — наибольшая из нижних (0,845 из первого опыта), верхняя — наименьшая из верхних (0,8575 из третьего).



Интервалы трёх измерений и их общая часть (полоса).

Получаем $0{,}845 \le \rho_x \le 0{,}8575$ г/см^3, или $\rho_x \approx 0{,}851 \pm 0{,}006$ г/см^3.

Обратите внимание: интервалы нельзя складывать в один широкий. Истина одна и должна лежать в каждом из них, поэтому оценка уже, чем у любого отдельного опыта.

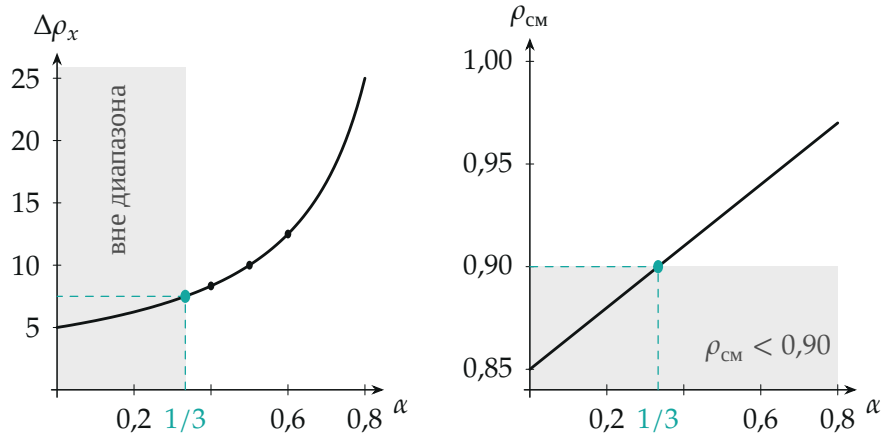
Пункт 3. Лучшая доля воды.

7. Чем меньше α, тем точнее. Погрешность $\Delta\rho_x = \Delta\rho/(1-\alpha)$ растёт вместе с α, поэтому доля воды должна быть как можно меньше.

8. Что мешает уменьшать α. Плотность смеси $\rho_{\text{см}} = \alpha\rho + (1-\alpha)\rho_x$ должна быть не ниже 0,90 г/см^3, иначе ареометр её не измерит. Подставим оценку $\rho_x \approx 0{,}85$ г/см^3 из пункта 2:

$$\alpha \cdot 1{,}00 + (1-\alpha)\cdot 0{,}85 \ge 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad 0{,}15\,\alpha \ge 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \alpha \ge \frac{1}{3}.$$

Верхний предел ареометра (1,20 г/см^3) смесь не превысит: она легче воды.



Слева погрешность $\Delta\rho_x(\alpha)$ (шкала 5, 10, … в единицах 10^{-3} г/см^3), справа плотность смеси при $\rho_x = 0{,}85$ г/см^3; серым отмечена область, где ареометр не работает.

9. Минимальная погрешность. Лучшая доля $\alpha_{\min} = 1/3$, и тогда

$$\Delta\rho_{x,\min} = \frac{\Delta\rho}{1-\frac{1}{3}} = \frac{0{,}005}{2/3} = 0{,}0075 \text{ г/см}^3.$$

Обратите внимание: граница $\alpha \geq 1/3$ получена для оценки $\rho_x = 0{,}85$. Для краёв интервала из пункта 2 она сдвигается: при $\rho_x = 0{,}8575$ нужно $\alpha \geq 0{,}30$, при $\rho_x = 0{,}845$ — $\alpha \geq 0{,}355$. Чтобы попасть в диапазон при любом ρ_x из интервала, берут $\alpha \approx 0{,}36$; погрешность 0,0078 г/см^3 почти не меняется.

Проверка. Подставим найденное ρ_x обратно: при $\alpha = 0{,}40$ и $\rho_x = 0{,}8533$ получаем $0{,}40 + 0{,}60 \cdot 0{,}8533 = 0{,}912$ — измеренное ρ_1. Предельные случаи: при $\alpha \to 0$ имеем $\Delta\rho_x \to \Delta\rho$ (измерили саму жидкость), при $\alpha \to 1$ погрешность неограниченно растёт: в смеси почти вода, и плотность почти не зависит от ρ_x. При $\alpha = 1/3$, $\rho_x = 0{,}85$ получаем $\rho_{\text{см}} = 0{,}90$ — нижний предел ареометра.

Смысл: прибор ограничивает смесь снизу, а пересчёт «раздувает» его ошибку при большой доле воды; наилучшая доля воды — самая малая, при которой смесь ещё попадает в диапазон ареометра.

Ответ. 1) $\rho_x = \dfrac{\rho_i - \alpha\rho}{1-\alpha}$, $\Delta\rho_x = \dfrac{\Delta\rho}{1-\alpha}$: $0{,}853 \pm 0{,}008$; $0{,}852 \pm 0{,}010$; $0{,}845 \pm 0{,}0125$ г/см^3; 2) $0{,}845 \leq \rho_x \leq 0{,}8575$ г/см^3 (около $0{,}851 \pm 0{,}006$); 3) $\alpha_{\min} = 1/3$, $\Delta\rho_{x,\min} = 0{,}0075$ г/см^3.