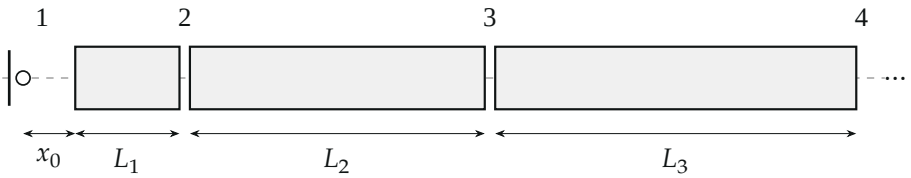
Линейный ускоритель Видероэ

Задача 1. [МОШ 2025/26, 8 класс, задача 1] Один из первых ускорителей заряженных частиц — линейный ускоритель Видероэ на дрейфовых трубках — состоит из последовательности полых проводящих трубок, разделённых узкими зазорами. Электрическое поле может существовать только в зазорах. Внутри трубок поле отсутствует, и ускоряемая частица движется по инерции.

Поле в зазорах меняется периодически: в течение времени τ оно направлено вдоль движения частицы (режим ускорения), а в течение следующего интервала времени τ — противоположно этому направлению (режим торможения). В момент $t = 0$ покоящаяся частица массы m начинает движение в первом зазоре. Известно, что в этом зазоре её скорость равномерно увеличивается в течение всего первого интервала τ, так что к моменту входа в первую трубку частица приобретает кинетическую энергию E. Все последующие зазоры считаются настолько узкими, что частица пролетает их практически мгновенно; при этом в каждом из них её кинетическая энергия также увеличивается на величину E.

Для эффективной работы ускорителя необходимо, чтобы каждый следующий зазор частица проходила точно в момент начала режима ускорения.

1. Найдите расстояние x_0, которое частица проходит в первом зазоре до входа в первую трубку.
2. Каким должно быть отношение длин трубок $L_1 : L_2 : \cdots : L_n$, если требуется, чтобы при заданном числе этапов ускорения общая длина установки была минимальной?



Поясняющий рисунок: схема ускорителя Видероэ. Длины трубок даны по

найденному ниже отношению, цифры — номера зазоров (поле только в них); показаны первые три трубки, пунктир — ось пучка.

▲ **Решение. Что происходит.** Вся работа ускорителя — в зазорах: там поле разгоняет частицу, а внутри трубок она летит с постоянной скоростью. Поле меняет знак каждые τ, поэтому разгоняющее поле есть в моменты от 0 до τ, от 2τ до 3τ, от 4τ до 5τ и так далее. Чтобы каждый зазор давал ускорение, частица должна проходить его в момент включения разгоняющего поля: $t = 2\tau,\ 4\tau,\ 6\tau, \ldots$. Времена пролёта трубок этим жёстко заданы, а скорости — энергией, набранной на каждом этапе. Длина трубки — это произведение скорости на время пролёта; главная идея второго пункта — взять наименьшее время, которое допускает синхронизм.

Обозначения. v_n — скорость частицы после n-го зазора (в n-й трубке), T_n — время пролёта n-й трубки, $L_n = v_n T_n$ — её длина.

Пункт 1.

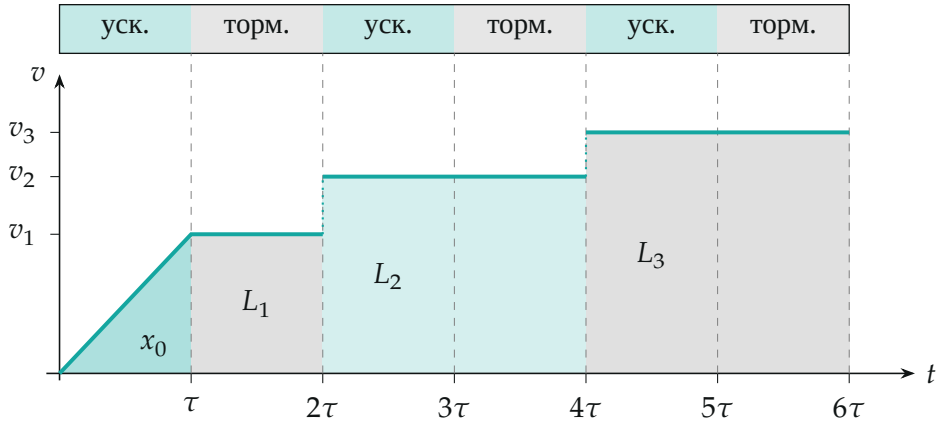
1. Скорость в конце первого зазора. Кинетическая энергия частицы к входу в первую трубку равна E, а её скорость там v_1:

$$E = \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

2. Путь в первом зазоре. По условию скорость в зазоре растёт равномерно от нуля до v_1 за время τ, то есть движение равноускоренное из состояния покоя. Путь при таком движении равен средней скорости, умноженной на время:

$$x_0 = \frac{0 + v_1}{2}\,\tau = \frac{v_1\tau}{2} = \tau\sqrt{\frac{E}{2m}}.$$

Тот же результат даёт площадь под графиком скорости: это треугольник с основанием τ и высотой v_1.



Скорость частицы и режим поля. Вверху режим поля: «уск.» — ускорение, «торм.» — торможение. Площадь под графиком — пройденный путь: треугольник — x_0, прямоугольники — длины трубок. Пунктир — границы интервалов длиной τ.

Пункт 2.

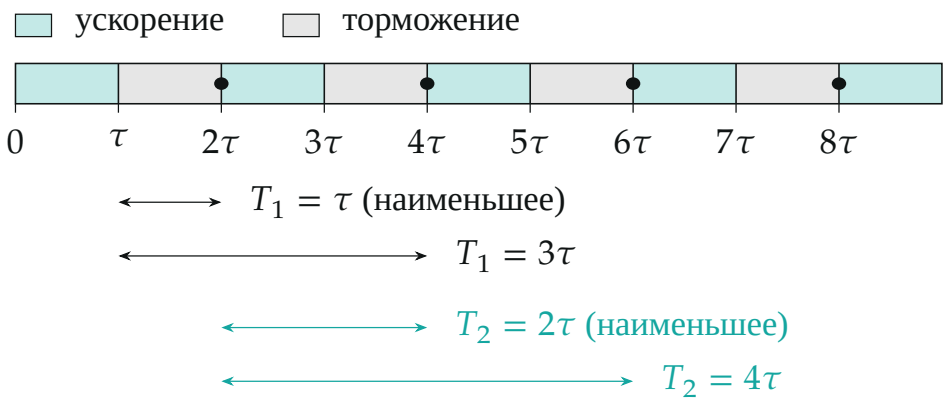
3. Когда частица может подойти к следующему зазору. К концу первого интервала τ частица входит в первую трубку, и в этот же момент включается торможение. Второй зазор нужно пройти в начале ускорения, то есть в момент $2k\tau$, где $k = 1, 2, \ldots$ Значит, время пролёта первой трубки

$$T_1 = 2k\tau - \tau = (2k-1)\tau,$$

то есть нечётное число интервалов τ: τ, 3τ, $5\tau, \ldots$

Все следующие зазоры частица проходит в моменты начала ускорения, которые идут через 2τ, поэтому время пролёта любой из остальных трубок кратно 2τ:

$$T_n = 2j\tau, \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad (n \geqslant 2).$$



Чёрные точки — моменты, в которые разрешено проходить зазор. Чёрные отрезки — возможные времена пролёта первой трубки (вход в неё в момент τ), бирюзовые — второй (вход в момент 2τ).

4. Что минимизировать. Скорость в каждой трубке задаётся только числом пройденных зазоров, а не временем: после каждого зазора энергия растёт на E. Поэтому длина каждой трубки $L_n = v_n T_n$ зависит только от её собственного времени пролёта T_n, и сумма длин минимальна, когда минимальна каждая из них:

$$T_1 = \tau, \qquad T_n = 2\tau \quad (n \geqslant 2).$$

5. Скорость в n-й трубке. После n зазоров кинетическая энергия равна nE:

$$\frac{mv_n^2}{2} = nE \quad \Rightarrow \quad v_n = \sqrt{\frac{2nE}{m}} = \sqrt{n}\, v_1.$$

6. Длины трубок.

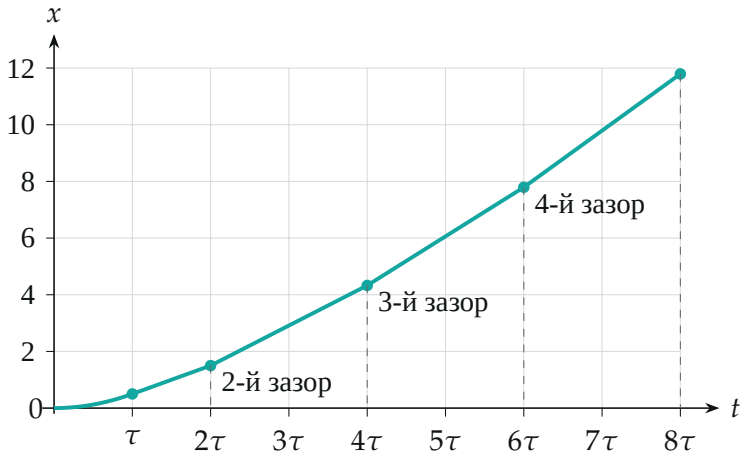
$$L_1 = v_1\tau, \qquad L_n = v_n \cdot 2\tau = 2\sqrt{n}\, v_1 \tau \quad (n \geqslant 2).$$

Разделив на L_1, получим отношение

$$L_1 : L_2 : L_3 : \cdots : L_n = 1 : 2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : \cdots : 2\sqrt{n}.$$

Числа: 1 : 2,83 : 3,46 : 4,00 : 4,47 : … Заодно $x_0 = L_1/2$: первый зазор в

два раза короче первой трубки, потому что там скорость растёт от нуля, а в трубке постоянна.



Координата частицы в единицах $v_1\tau$ (от начала движения). Точка при τ — выход из первого зазора, $x(\tau) = x_0 = 0{,}5\,v_1\tau$. Остальные точки — моменты прохода зазоров 2τ, 4τ, 6τ, 8τ; наклон прямой между ними растёт как $\sqrt{n}$.

Обратите внимание. Первая трубка исключение: её время пролёта τ, а не 2τ, поэтому в отношении перед $2\sqrt{2}$ стоит единица, а не 2. Пролёт первой трубки за 2τ не годится: частица подошла бы к зазору в момент 3τ, когда ускорение уже кончилось и включилось торможение — энергия бы не выросла.

Проверка. Размерность: $x_0 \sim \text{с}\cdot\sqrt{\text{Дж/кг}} = \text{с}\cdot\text{м/с} = \text{м}$. Второй способ для пункта 1: ускорение в зазоре $a = v_1/\tau$, путь $x_0 = a\tau^2/2 = v_1\tau/2$ — тот же результат. Предел: при больших n отношение соседних длин $L_{n+1}/L_n = \sqrt{(n+1)/n} \to 1$ — каждый зазор добавляет одну и ту же энергию E, и у быстрой частицы скорость от этого растёт всё меньше, поэтому последние трубки почти одинаковы.

Смысл такой: частица всё время должна «попадать в такт» с полем, а так как она летит всё быстрее, то за один и тот же такт 2τ проходит всё более длинную трубку.

Ответ. 1) $x_0 = \tau\sqrt{\dfrac{E}{2m}}$; 2) $L_1 : L_2 : \cdots : L_n = 1 : 2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : \cdots : 2\sqrt{n}$.