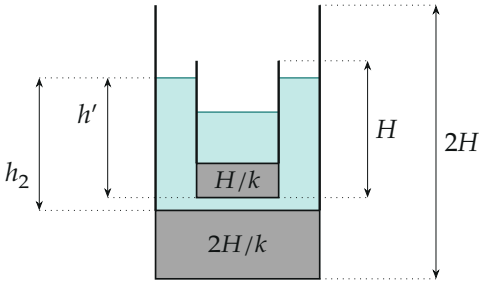
Цилиндры

Задача 1. [МОШ 2025/26, 8 класс, задача 2] Есть два цилиндрических геометрически подобных сосуда, изготовленных из одного и того же материала, плотность которого больше плотности воды. Сосуды тонкостенные, но с массивным дном. Их линейные размеры относятся как $2:1$. Больший сосуд стоит на горизонтальном столе и заполнен водой; в нём плавает (естественно, не касаясь дна) меньший сосуд, также заполненный водой. Известно, что объём воды в каждом сосуде составляет одну и ту же долю его внутреннего объёма. Толщина дна каждого сосуда равна $\frac{1}{k}$ его высоты, где $k > 1$. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

1. Пусть $k = 4$. Определите диапазон возможных значений плотности ρ материала сосудов.
2. При каких значениях k не существует ответа на вопрос предыдущего пункта?
3. Предположим, что число сосудов увеличилось до N. N-й сосуд стоит на столе и заполнен водой; в нём плавает $(N-1)$-й сосуд, в нём — $(N-2)$-й и так далее. Линейные размеры сосудов относятся как $N:(N-1):(N-2):\dots:2:1$. Объём воды в каждом сосуде составляет одну и ту же долю его внутреннего объёма.
   Утверждается, что при заданном значении k ($k > 2$) и некотором значении ρ ($\rho > \rho_0$) такая система сосудов может существовать в равновесии (возможно, неустойчивом) для любого $N \geqslant 3$.
   Верно ли это утверждение?

При решении может оказаться полезной формула для суммы кубов натуральных чисел

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \sum_{a=1}^{n} a^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$



Поясняющий рисунок ($k = 4$, $\rho = 2\rho_0$, воды по половине объёма): H — высота малого сосуда, h' — его осадка, h_2 — глубина воды в большом.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сосуды тонкостенные, поэтому вся масса материала — в дне: у сосуда высотой H и площадью основания S материал занимает объём SH/k. Малый сосуд плавает: сила Архимеда уравновешивает вес сосуда и воды в нём, и отсюда находится осадка. Плотность материала ограничена тремя условиями: малый сосуд не должен утонуть (осадка не больше его высоты), не должен достать до дна большого (осадка меньше глубины воды), а вода в большом сосуде не должна переливаться через его край. Доля воды α не задана, поэтому плотность подходит, если хотя бы при одном α выполнены все три условия. В третьем пункте масса сосудов растёт как куб размера, а нагрузка на сосуд — как сумма кубов, то есть как n^4, тогда как его объём — как n^3.

Обозначения. Малый сосуд: высота H, площадь основания S, толщина дна H/k; большой: высота $2H$, площадь $4S$, толщина дна $2H/k$, высота полости над дном $2H(k-1)/k$. $x = \rho/\rho_0$ — отношение плотностей ($x > 1$), $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. α — доля воды во внутреннем объёме. h' — осадка малого сосуда, h_2 — глубина воды в большом сосуде над его дном. Массой тонких стенок пренебрегаем.

Пункт 1.

1. Условие плавания малого сосуда. На него действуют сила тяжести материала, вес воды в нём и сила Архимеда. Масса материала равна $\rho SH/k$, масса воды — $\rho_0\,\alpha\,SH(k-1)/k$ (внутренний объём — высота

без дна). Вытесненный объём — цилиндр высотой h':

$$\rho_0 g\, S\, h' = \rho g\, \frac{SH}{k} + \rho_0 g\, \alpha\, \frac{SH(k-1)}{k} \quad \Rightarrow \quad h' = H\left(\frac{x}{k} + \frac{\alpha(k-1)}{k}\right).$$

2. Первое ограничение: сосуд не тонет. Осадка не больше высоты, $h' \leqslant H$, иначе вода перельётся через борт:

$$\frac{x}{k} + \frac{\alpha(k-1)}{k} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant k - \alpha(k-1). \qquad \text{(А)}$$

3. Глубина воды в большом сосуде. Во внутреннем объёме большого сосуда $4S \cdot 2H(k-1)/k$ воды доля α, то есть $8\alpha SH(k-1)/k$. Малый сосуд вытесняет объём Sh', поэтому вода вместе с вытесненным объёмом занимает слой глубиной h_2 над площадью $4S$:

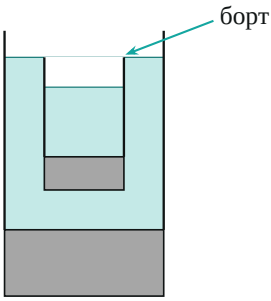
$$4S\, h_2 = \frac{8\alpha SH(k-1)}{k} + Sh',$$
$$h_2 = \frac{2\alpha H(k-1)}{k} + \frac{h'}{4} = H\,\frac{9\alpha(k-1)+x}{4k}.$$

4. Второе ограничение: малый сосуд не достаёт до дна. Осадка меньше глубины воды, $h' < h_2$:

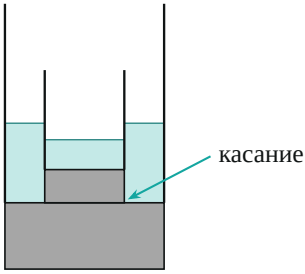
$$\frac{x}{k} + \frac{\alpha(k-1)}{k} < \frac{9\alpha(k-1)+x}{4k} \quad \Rightarrow \quad 4x + 4\alpha(k-1) < 9\alpha(k-1) + x.$$

Отсюда

$$x < \frac{5}{3}\,\alpha(k-1). \qquad \text{(Б)}$$



а) $h' = H$:
борт на уровне воды



б) $h' = h_2$:
дно касается дна

Предельные случаи двух ограничений (для $k = 4$): а) осадка равна высоте — борт малого сосуда вровень с водой (ограничение А); б) осадка равна глубине воды — дно малого сосуда касается дна большого (ограничение Б).

5. Третье ограничение: вода не переливается через край большого сосуда. Глубина воды не больше высоты полости большого сосуда, $h_2 \leqslant 2H(k-1)/k$. Иначе часть воды выльется, и её доля станет меньше, чем в малом сосуде:

$$\frac{9\alpha(k-1)+x}{4k} \leqslant \frac{2(k-1)}{k} \quad \Rightarrow \quad x \leqslant (k-1)(8-9\alpha). \qquad \text{(В)}$$

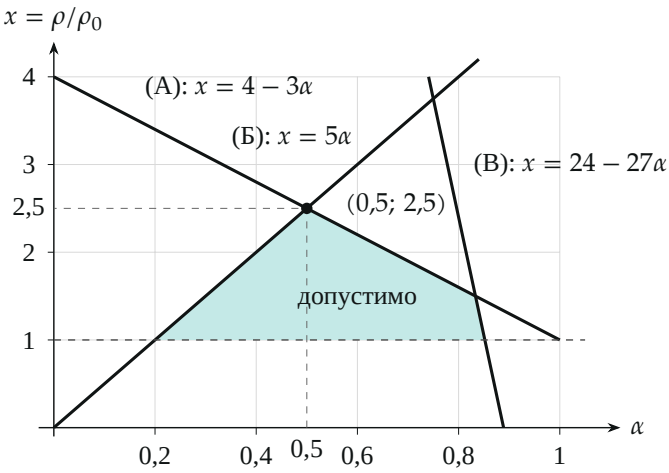
6. Подставляем $k = 4$. Ограничения (А), (Б) и (В) принимают вид

$$x \leqslant 4 - 3\alpha, \qquad x < 5\alpha, \qquad x \leqslant 24 - 27\alpha.$$

Нужно найти все $x > 1$, для которых существует хотя бы одно α из $(0;1]$. Из (Б) получаем $\alpha > x/5$, из (А) — $\alpha \leqslant (4-x)/3$. Подходящее α есть, когда

$$\frac{x}{5} < \frac{4-x}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x < 20 - 5x \quad \Rightarrow \quad x < 2{,}5.$$

Значит, $1 < x < 2{,}5$, то есть $1000\ \text{кг/м}^3 < \rho < 2500\ \text{кг/м}^3$. Для любого такого x подходит α чуть больше $x/5$: оно меньше единицы, а (В) при нём тоже выполнено, потому что $x/5 < (24-x)/27$ при $x < 3{,}75$. Ограничение (В) лишь срезает угол области у $\alpha \approx 0{,}85$ и на ответ пункта 1 не влияет.



Плоскость $(\alpha; x)$ для $k = 4$. Допустимы точки бирюзовой области: ниже прямых (А), (Б), (В) и выше $x = 1$. Верхняя вершина $(0{,}5;\ 2{,}5)$ даёт предельную плотность $\rho = 2500$ кг/м^3. По вертикали отложено $x = \rho/\rho_0$.

Пункт 2.

7. Любое k. Удобно обозначить $u = \alpha(k-1)$, тогда ограничения

$$x \leqslant k - u, \qquad x < \frac{5}{3}u, \qquad x \leqslant 8(k-1) - 9u, \qquad 0 < u \leqslant k - 1.$$

Граница (Б) с ростом u поднимается, а (А) и (В) опускаются, поэтому наибольшее x — там, где прямая (Б) встречает ту из прямых (А), (В), что лежит ниже. Пересечения:

$$\text{(А) и (Б):}\ u = \frac{3k}{8},\ x = \frac{5k}{8}; \qquad \text{(Б) и (В):}\ u = \frac{3}{4}(k-1),\ x = \frac{5}{4}(k-1).$$

Значит,

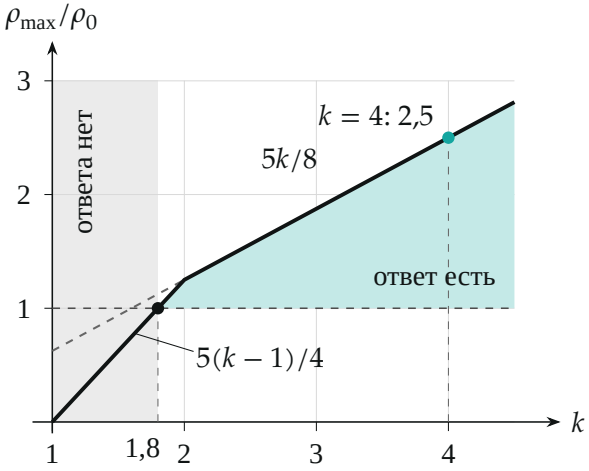
$$\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} = \min\left(\frac{5k}{8};\ \frac{5(k-1)}{4}\right) = \begin{cases} \dfrac{5(k-1)}{4}, & k < 2, \\ \dfrac{5k}{8}, & k \geqslant 2. \end{cases}$$

При $k = 4$ получаем 2,5, как в пункте 1. Диапазон плотностей непуст,

только если $\rho_{\max} > \rho_0$. При $k \geqslant 2$ это выполнено всегда ($5k/8 \geqslant 1{,}25$), при $k < 2$ нужно

$$\frac{5(k-1)}{4} > 1 \quad \Rightarrow \quad k > \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

Значит, ответа не существует при $k \leqslant 1{,}8$. Если забыть про ограничение (B), то верхней границей везде будет $5k/8$, и получится $k \leqslant 1{,}6$ — так ответили организаторы. Но при $1{,}6 < k \leqslant 1{,}8$ найденные ими плотности требуют, чтобы глубина воды в большом сосуде была больше высоты его полости, то есть такая система не существует.



Верхняя граница плотности $\rho_{\max}/\rho_0$ в зависимости от k (сплошная ломаная): при $k < 2$ её задаёт ограничение (B), при $k \geqslant 2$ — ограничение (A). Пока граница ниже единицы ($k \leqslant 1{,}8$), подходящих плотностей нет. Пунктир — граница $5k/8$ без учёта (B), она пересекает единицу при $k = 1{,}6$. Точка при $k = 4$ — результат первого пункта.

Пункт 3.

8. Масса сосуда с водой. Сосуд номер a подобен самому малому с коэффициентом a: все объёмы больше в a^3 раз, доли материала и воды те же. Если $V = SH$ — внешний объём самого малого, то масса его

материала и воды

$$m_1 = \rho_0 V \mu, \qquad \mu = \frac{x}{k} + \frac{\alpha(k-1)}{k}, \qquad m_a = a^3 m_1.$$

Число μ то же, что h'/H из пункта 1.

9. Нагрузка на сосуд номер n. Сосуд $n-1$ плавает в воде сосуда n и давит на воду своим весом (вместе со всем, что в нём), а вода передаёт это давление дну сосуда n. Поэтому сила Архимеда, действующая на сосуд n со стороны воды сосуда $n+1$, равна весу всего, что внутри сосуда n: самого сосуда, его воды и сосудов $n-1, \dots, 1$. Суммарная масса по формуле суммы кубов:

$$M_n = m_1 \left(1^3 + 2^3 + \dots + n^3\right) = m_1 \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

10. Условие плавания. Вытесненный объём $V'_n = M_n/\rho_0$ не больше полного объёма сосуда n, равного $n^3 V$:

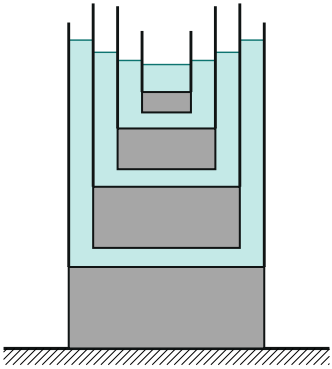
$$\mu V \frac{n^2(n+1)^2}{4} \leqslant n^3 V \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{(n+1)^2}{4n} \leqslant 1 \qquad (\Gamma)$$

для всех $n = 1, 2, \dots, N-1$ (самый большой сосуд стоит на столе и не плавает). Для $n = 1$ это условие (А).

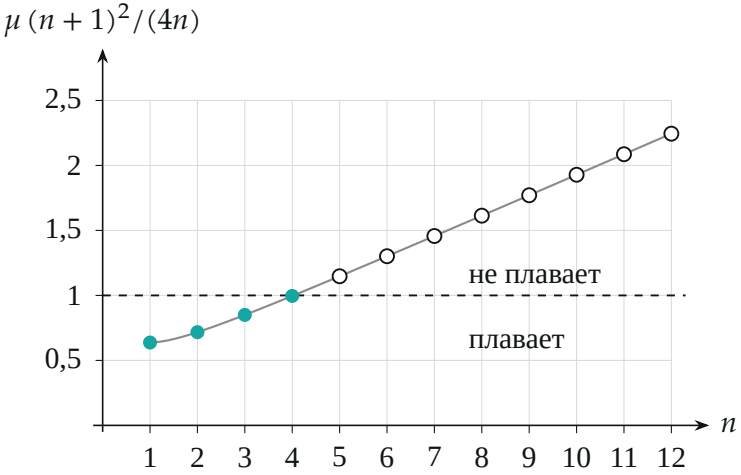
11. Рост левой части. Так как $(n+1)^2 > n^2$, имеем $\dfrac{(n+1)^2}{4n} > \dfrac{n}{4}$, и левая часть (Г) растёт с n без предела. Возьмём $n \geqslant 4k$:

$$\mu \frac{(n+1)^2}{4n} > \mu \frac{n}{4} \geqslant \mu k = x + \alpha(k-1) > 1,$$

поскольку $x > 1$. Значит, условие (Г) нарушается при $n = \lceil 4k \rceil$, а система из $N \geqslant \lceil 4k \rceil + 1$ сосудов не может плавать — ни при какой плотности $\rho > \rho_0$ и ни при каком α. Утверждение неверно.



Пример матрёшки в масштабе: $k = 4$, $\rho = 1200$ кг/м^3, $\alpha = 0{,}45$, $N = 4$ (линейные размеры $1 : 2 : 3 : 4$). Каждый сосуд плавает в следующем, не касаясь его дна; борта малых сосудов выступают над бортом большого.



Левая часть условия (Г) для $k = 4$, $\rho = 1200$ кг/м^3, $\alpha = 0{,}45$ ($\mu = 0{,}6375$). Для $n = 1, \ldots, 4$ она не больше единицы, начиная с $n = 5$ превосходит её и дальше растёт — система из такого числа сосудов плавать не может.

Обратите внимание. Первое: доля воды α не дана, поэтому границу плотности ищем как верхнюю вершину допустимой области на плоскости $(\alpha; x)$, а не подставляем конкретное α. Второе: 2500 кг/м^3 в ответ не входит — при этой плотности малый сосуд лишь касается дна, а условие требует «не касаясь». Третье: условие (В) легко пропустить, потому

что при $k = 4$ оно ничего не меняет; но при $k < 2$ именно оно задаёт границу, и без него ответ второго пункта получается неверным ($k \leqslant 1{,}6$ вместо $k \leqslant 1{,}8$).

Проверка. Величины x, α, μ безразмерны. В вершине $(\alpha; x) = (0{,}5;\ 2{,}5)$ при $k = 4$ осадка и глубина воды равны высоте малого сосуда:

$$h' = H\,(0{,}625 + 0{,}375) = H, \qquad h_2 = H\,\frac{9 \cdot 1{,}5 + 2{,}5}{16} = H,$$

то есть обе предельные ситуации (А) и (Б) наступают одновременно, как и должно быть в точке пересечения прямых. При пороговом $k = 1{,}8$, $\alpha = 3/4$, $x = 1$ осадка, глубина воды и высота полости большого сосуда совпадают: все три равны $8H/9$ — граница (В) действительно проходит через точку $x = 1$.

Смысл такой: масса стопки сосудов растёт как четвёртая степень размера, а объём, который вытесняет самый крупный плавающий сосуд, — лишь как третья, поэтому достаточно длинная стопка обязательно тонет.

Ответ. 1) 1000 кг/м$^3 < \rho < 2500$ кг/м^3; 2) $k \leqslant 1{,}8$ (без учёта перелива воды через край большого сосуда получается $k \leqslant 1{,}6$, как у организаторов); 3) утверждение неверно.