Нелинейная верёвка

Задача 1. [МОШ 2025/26, 8 класс, задача 4] В лаборатории исследуют свойства особой многожильной верёвки, сплетённой из волокон разных типов. Для описания свойств такой верёвки удобно использовать *дифференциальную жёсткость* k, которая определяется как отношение малого изменения силы упругости ΔF к вызванному им малому изменению удлинения Δx:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

В лаборатории имеется большое количество образцов — отрезков исследуемой верёвки одинаковой длины. Всякий раз эксперимент проводят с новым образцом.

В опытах первого типа образец закрепляют и плавно увеличивают его растяжение x, измеряя возникающую силу натяжения F. Полученные данные свидетельствуют, что при достижении пороговых значений удлинения (в моменты разрыва внутренних волокон того или иного типа) сила натяжения скачкообразно уменьшается. Разорванные волокна при снятии нагрузки не восстанавливаются. На рис. 1 приведён график зависимости k от силы натяжения F (полужирные линии чёрного цвета), построенный по результатам этого исследования.

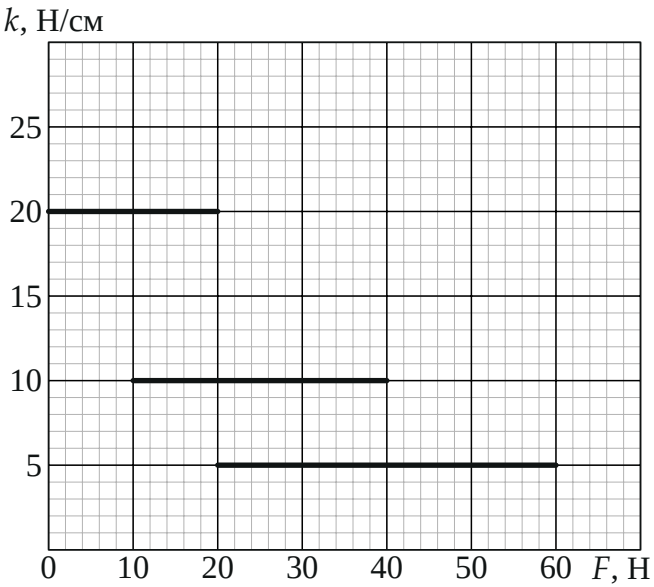


Рис. 1

1. Используя график $k(F)$, восстановите зависимость силы от удлинения $F(x)$ для процесса *растяжения* образца. Постройте график $F(x)$, отметив на осях значения в характерных точках.

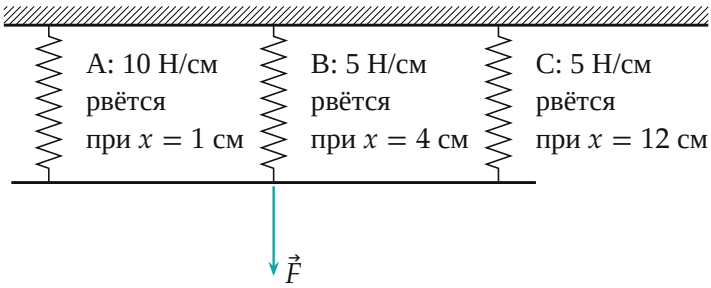
В опытах второго типа один конец образца закрепляют, а к другому подвешивают лёгкое ведро. В ведро начинают равномерно подсыпать песок, так что его вес увеличивается линейно со временем. Через 30 мин вес достигает 50 Н, после чего песок начинают так же равномерно удалять до полного опустошения ведра (что занимает ещё 30 мин). Установка оснащена специальным демпфером, который мгновенно гасит колебания ведра при разрывах волокон.

2. Изобразите идеализированный график зависимости удлинения образца x от времени t на протяжении всех 60 мин эксперимента, полагая, что система в любой момент времени находится в положении равновесия.

▲ **Решение. Что происходит.** Верёвка состоит из волокон, которые растягиваются вместе. Пока ни одно не порвалось, все они вместе дают одну жёсткость; когда волокна одного типа рвутся, жёсткость верёвки

уменьшается, а удлинение x в момент разрыва не успевает измениться. Поэтому участки графика $k(F)$ — это «ступени»: на каждой ступени верёвка ведёт себя как обычная пружина с постоянной жёсткостью k. Закрепляем конец (первый опыт) — удлинение задаём мы, и при разрыве скачком падает сила. Подвешиваем груз (второй опыт) — сила задана весом, и при разрыве скачком растёт удлинение. Главная идея — считать участок за участком: на участке силу даёт линейный закон, а на стыке участков удлинение не меняется, а сила переходит на начало следующей ступени графика $k(F)$.

Обозначения. Три ступени графика (рис. 1): ступень I — $k_1 = 20$ Н/см при F от 0 до 20 Н; ступень II — $k_2 = 10$ Н/см при F от 10 до 40 Н; ступень III — $k_3 = 5$ Н/см при F от 20 до 60 Н. x_1, x_2, x_3 — удлинения в моменты разрывов, t_1, t_2 — моменты разрывов во втором опыте. Единицы: x в сантиметрах, F в ньютонах, t в минутах.



Поясняющая модель: верёвка как три группы волокон, растянутые вместе на одно и то же x. Жёсткости складываются ($10 + 5 + 5 = 20$ Н/см); после разрыва группы A остаётся $5 + 5 = 10$, после разрыва B — 5 Н/см. Это согласуется с рис. 1.

Пункт 1. График $F(x)$ при растяжении.

1. Ступень I. Пока $F \leqslant 20$ Н, жёсткость постоянна, $k_1 = \Delta F/\Delta x = 20$ Н/см, а верёвка начинает с нулевой силы при нулевом растяжении, поэтому

$$F = k_1 x = 20x.$$

Эта ступень кончается при $F = 20$ Н, то есть при $x_1 = \dfrac{20\text{ Н}}{20\text{ Н/см}} = 1$ см.

2. Первый разрыв. В момент $x_1 = 1$ см часть волокон рвётся. Удлинение образца при этом остаётся прежним (его удерживает зажим), а сила падает на начало ступени II — до 10 Н. На графике — вертикальный скачок вниз с 20 до 10 Н.

3. Ступень II. Теперь жёсткость $k_2 = 10$ Н/см, при $x_1 = 1$ см сила равна 10 Н. Закон на ступени:

$$F = 10 + 10\,(x - 1) = 10x,$$

то есть снова прямая, проходящая через начало координат. Ступень кончается при $F = 40$ Н: $x_2 = 40/10 = 4$ см.

4. Второй разрыв и ступень III. При $x_2 = 4$ см рвутся волокна ещё одного типа, сила падает с 40 до 20 Н — на начало ступени III ($k_3 = 5$ Н/см). Дальше

$$F = 20 + 5\,(x - 4) = 5x.$$

Эта ступень идёт до $F = 60$ Н: $x_3 = 4 + \dfrac{60 - 20}{5} = 12$ см — здесь график $k(F)$ кончается, при $x_3 = 12$ см образец рвётся совсем.

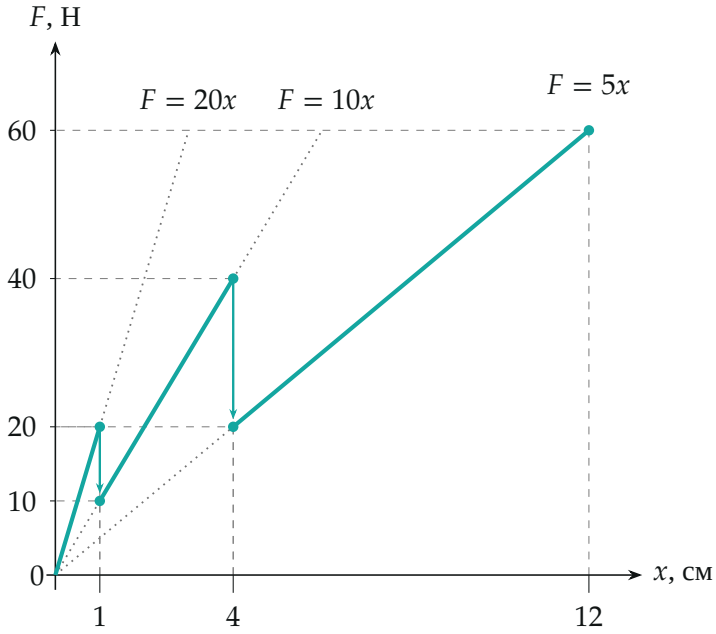


График $F(x)$ при растяжении. Жирная линия — ступени I, II, III, стрелки — скачки силы при разрывах, пунктир — лучи $F = 20x$, $F = 10x$, $F = 5x$, на которых лежат ступени. Метки на осях — характерные точки.

Итог первого пункта: ломаная $(0;0) \to (1;20)$, скачок вниз до $(1;10)$, далее до $(4;40)$, скачок до $(4;20)$, далее до $(12;60)$.

Пункт 2. График $x(t)$.

5. Нагрузка во времени. В ведро насыпают песок равномерно, значит, вес (а вместе с ним сила упругости, раз система всегда в равновесии) растёт линейно: 50 Н за 30 мин, то есть $F = \dfrac{50}{30}t = \dfrac{5}{3}t$ Н/мин на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 30$ мин. Потом песок убирают так же равномерно: $F = \dfrac{5}{3}(60 - t)$ на отрезке $30 \leqslant t \leqslant 60$ мин.

6. Нагрузка до первого разрыва. Пока $F < 20$ Н, действует ступень I: $x = F/20$. Разрыв наступает при $F = 20$ Н:

$$t_1 = \frac{20}{5/3}\ \text{мин} = 12\ \text{мин}, \qquad x(t_1 - 0) = 1\ \text{см}.$$

До этого момента $x = t/12$ (в см, t в минутах) — прямая из начала координат.

7. Первый разрыв при постоянной нагрузке. Теперь удерживает ведро не зажим, а вес, и он равен 20 Н. После разрыва верёвка стала «пружиной» ступени II с законом $F = 10x$. Новое равновесие: $20 = 10x$, то есть $x = 2$ см. Удлинение мгновенно (демпфер гасит колебания) вырастает с 1 до 2 см — вертикальный участок графика. Далее $x = F/10 = t/6$.

8. Второй разрыв. Ступень II кончается при $F = 40$ Н:

$$t_2 = \frac{40}{5/3}\ \text{мин} = 24\ \text{мин}, \qquad x(t_2 - 0) = \frac{40}{10} = 4\ \text{см}.$$

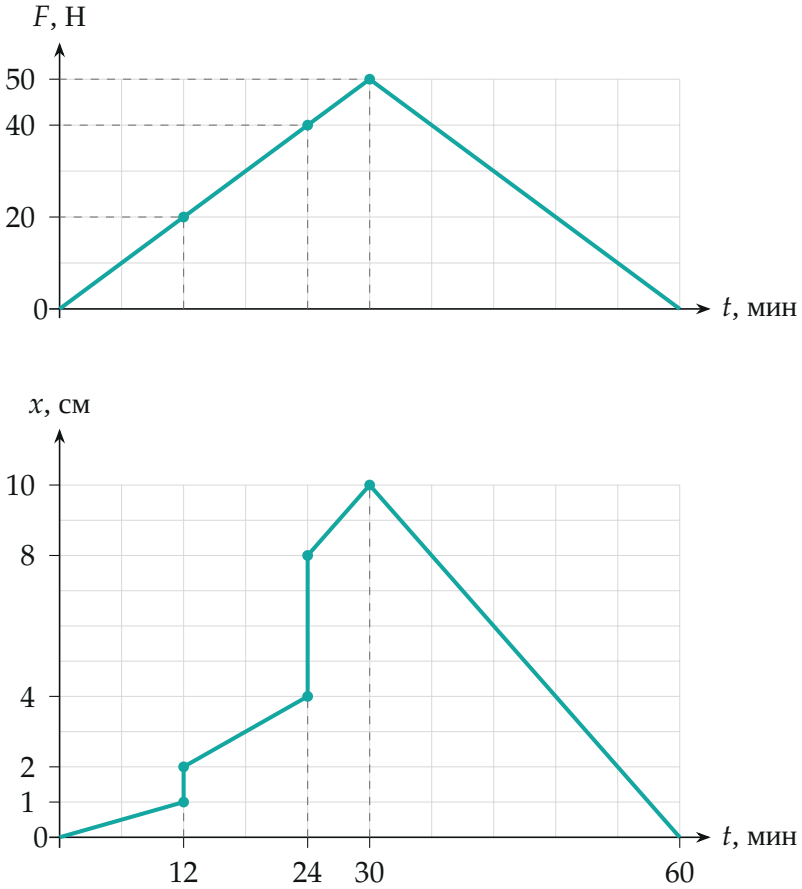
После разрыва верёвка переходит на ступень III, $F = 5x$; при том же весе 40 Н получаем $x = 40/5 = 8$ см. Удлинение скачком вырастает с 4 до 8 см. Далее $x = F/5 = t/3$.

9. Конец нагрузки. При $t = 30$ мин вес 50 Н; это меньше 60 Н (предел

ступени III), значит, верёвка больше не рвётся:

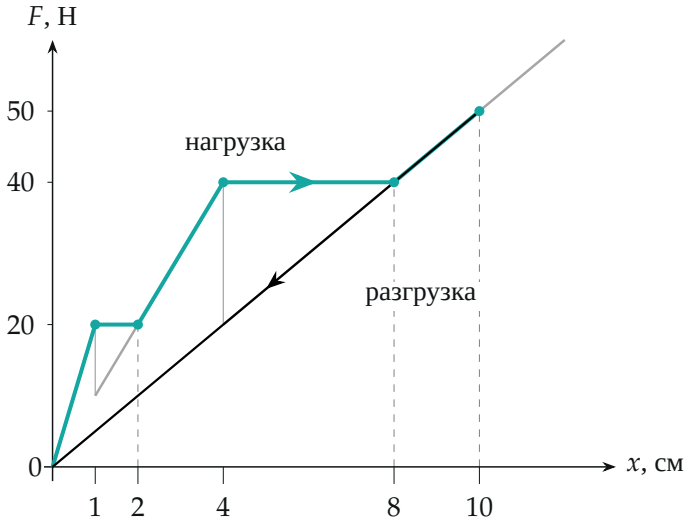
$$x(30) = \frac{50}{5}\ \text{см} = 10\ \text{см}.$$

10. Разгрузка. Разорванные волокна не восстанавливаются, поэтому верёвка остаётся такой же, какой она стала после второго разрыва: пружина с законом $F = 5x$. Скачков нет, зависимость линейная: $x = F/5 = (60 - t)/3$ см. Она убывает от 10 см при $t = 30$ мин до 0 при $t = 60$ мин — до нуля, потому что с пустым ведром $F = 0$ и $x = 0$.



Вверху — сила (вес ведра), внизу — удлинение. Вертикальные участки —

мгновенные разрывы при $t = 12$ и 24 мин: нагрузка не меняется, удлинение растёт скачком ($1 \to 2$ и $4 \to 8$ см). При разгрузке скачков нет.



Путь второго опыта на плоскости F–x. Бирюзовая линия — нагрузка: при разрыве сила остаётся постоянной (вес не меняется), а x растёт скачком вправо. Чёрная линия — разгрузка по лучу $F = 5x$. Серая ломаная — график первого пункта, где при разрыве сила падает вниз.

Обратите внимание. Разрыв выглядит по-разному в двух опытах: в первом удлинение удерживает зажим, поэтому *падает сила*; во втором силу задаёт вес, поэтому *растёт удлинение*. Поэтому график $x(t)$ состоит из прямых, которые обрываются вертикальными скачками вверх, а не вниз. Второе: при разгрузке нет скачков назад — порванные волокна не срастаются, и обратный путь идёт по лучу $F = 5x$ целиком до нуля.

Проверка. Единицы: $\text{Н}/(\text{Н/см}) = \text{см}$ на каждой ступени. Пока нагрузка растёт, удлинение не убывает: $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 10$ см. Второй способ: на ступенях скорость роста удлинения равна $\dfrac{5/3\ \text{Н/мин}}{k}$, то есть $\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{3}$ см/мин, и это совпадает с наклонами $x = t/12$, $t/6$, $t/3$. Согласуется и с моделью из трёх групп волокон: после разрыва двух групп остаётся одна жёсткостью 5 Н/см, она и несёт вес 50 Н: $x = 50/5 = 10$ см, как в п. 9.

Смысл такой: верёвка «помнит» разрывы, поэтому после нагрузки она стала мягче и осталась такой же мягкой на всём обратном пути.

Ответ. 1) $F(x)$ — ломаная: $F = 20x$ до $x = 1$ см, скачок вниз $20 \to 10$ Н, $F = 10x$ до $x = 4$ см, скачок вниз $40 \to 20$ Н, $F = 5x$ до $x = 12$ см (60 Н); 2) $x = t/12$ до $t_1 = 12$ мин, скачок с 1 до 2 см, $x = t/6$ до $t_2 = 24$ мин, скачок с 4 до 8 см, $x = t/3$ до $x(30) = 10$ см, далее линейно убывает до нуля к 60-й минуте (без обратных скачков).