Разворот системы

Задача 1. [МОШ 2025/26, 9 класс, задача 1] Две пристани расположены на противоположных берегах реки шириной 100 м напротив друг друга в точках A и B. Скорость течения реки равна 1 м/с. На том же берегу, где находится пристань B, ниже по течению расположена пристань C. От пристани A отплывает вёсельная лодка, которая держит курс под углом α ($\sin\alpha = 3/5$) к направлению скорости течения реки. Скорость лодки относительно воды всё время остаётся постоянной по модулю и направлению. Одновременно с лодкой от пристани B в сторону пристани C выезжает велосипедист и движется с постоянной скоростью. Доехав до пристани C, он быстро разворачивается на 180° и с прежней скоростью едет обратно в направлении пристани B.

На рис. 1 показана (в неизвестном масштабе) траектория $KLMN$ лодки в системе отсчёта велосипедиста от момента старта (точка K) до момента причаливания к противоположному берегу (точка N). Оси используемой системы координат жёстко связаны с рамой велосипеда (на рисунке не показаны). Разворот велосипедиста на 180° считается мгновенным.

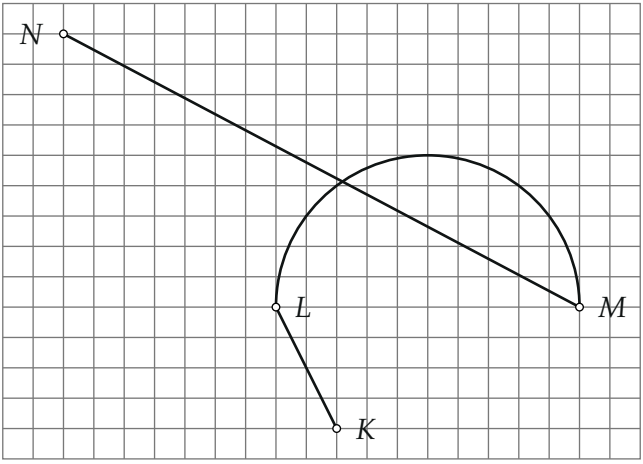
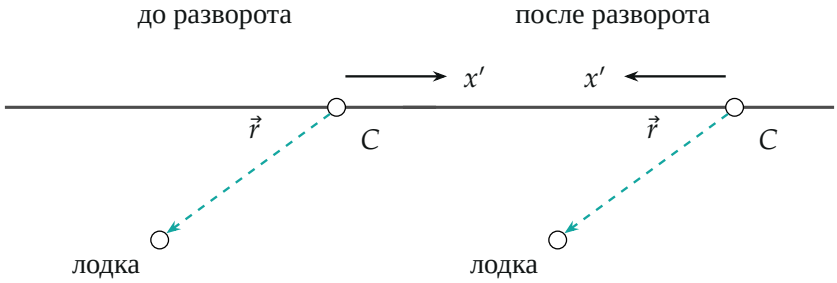


Рис. 1

1. Определите скорость велосипедиста, скорость лодки относительно воды и расстояние между пристанями B и C.

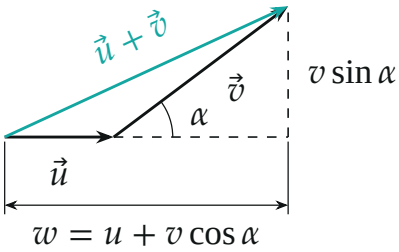
▲ **Решение. Что происходит.** Лодка движется относительно берега равномерно и прямолинейно, рама велосипеда тоже сначала едет равномерно, поэтому в осях рамы лодка идёт по прямой — отрезок KL. В момент разворота оси рамы поворачиваются на 180° вокруг велосипедиста, и вектор «от велосипедиста к лодке», записанный в этих осях, меняет знак: точка L превращается в точку M, симметричную ей относительно велосипедиста. Обратите внимание: лодка при этом не двигалась, меняется только описание её положения; дуга LM — след поворота осей, а не путь лодки. После разворота рама снова едет равномерно, лодка идёт по прямой MN. Главная идея: дуга и её центр дают масштаб рисунка и направление берега, а отрезки KL и MN — перемещения лодки относительно велосипедиста, из которых получаются три уравнения для v, V и времени плавания.



в осях рамы $\vec{r} = (-80;\ -60)$ м в осях рамы $\vec{r} = (80;\ 60)$ м

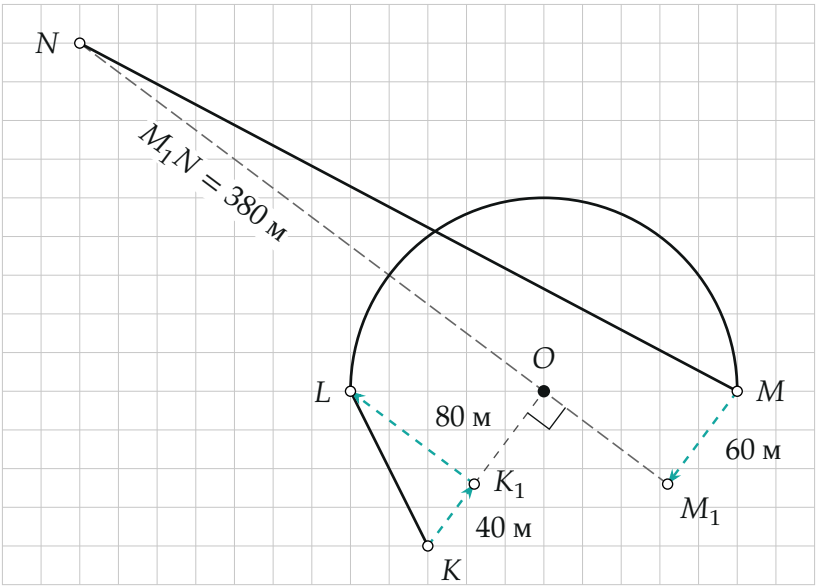
Момент разворота в системе берега: вектор $\vec{r}$ от велосипедиста к лодке не изменился, а ось рамы x' повернулась на 180° — координаты $\vec{r}$ в осях рамы сменили знак.

Обозначения. $u = 1$ м/с — скорость течения, v — скорость лодки относительно воды, V — скорость велосипедиста, t — время плавания лодки до причала, t_1 — время до разворота, $t_2 = t - t_1$ — после него. Угол α острый: $\cos\alpha = 4/5$. В системе отсчёта берега скорость лодки $\vec{u} + \vec{v}$ постоянна; вдоль берега (вниз по течению) её проекция $w = u + v\cos\alpha$, поперёк реки — $v\sin\alpha$.



Скорости лодки в системе отсчёта берега: течение $\vec{u}$ вдоль берега, $\vec{v}$ — под углом α к нему.

1. Масштаб рисунка. Начало осей рамы лежит в велосипедисте, поэтому точка O — центр дуги LM, середина диаметра LM — и есть велосипедист; радиус дуги $OL = OM = 5$ клеток. В момент старта лодка в пункте A, а велосипедист в B, так что $OK = AB = 100$ м. На рисунке OK — гипотенуза треугольника с катетами 3 и 4 клетки, то есть $OK = 5$ клеток. Отсюда сторона клетки $a = 20$ м. Заодно: радиус дуги $5a = 100$ м — лодка в момент разворота тоже в 100 м от велосипедиста (проверим это ниже).



Разложение перемещений: KK_1 и MM_1 — поперёк реки (вдоль KO), K_1L и M_1N — вдоль берега (штрихпунктир — берег, по которому едет велосипедист).

2. Направление берега и перемещения. Пристани стоят напротив друг друга, значит, AB перпендикулярна берегам, а берег с велосипедистом проходит через O перпендикулярно OK. Это и есть прямая ON: точка N — место причаливания, она тоже на берегу. Проверим: $\overrightarrow{OK} = (-3;-4)$, $\overrightarrow{ON} = (-12;9)$ клеток, скалярное произведение $36 - 36 = 0$. Разложим перемещения лодки относительно велосипедиста на «поперёк реки» (вдоль KO) и «вдоль берега» (вдоль NO); для этого опустим катеты KK_1, K_1L и MM_1, M_1N:

$$KK_1 = 2a = 40\text{ м}, \quad K_1L = 4a = 80\text{ м},$$
$$MM_1 = 3a = 60\text{ м}, \quad M_1N = 19a = 380\text{ м}.$$

Сумма $KK_1 + MM_1 = 40 + 60 = 100$ м равна ширине реки: за два участка лодка как раз пересекла реку, значит, разложение сделано верно.

3. Деление времени. Поперёк реки лодка движется со скоростью $v\sin\alpha = \text{const}$: велосипедист едет вдоль берега, и его разворот на неё не влияет. Значит, поперечные перемещения пропорциональны времени:

$$\frac{t_1}{t} = \frac{40}{100} = 0{,}4, \qquad \frac{t_2}{t} = \frac{60}{100} = 0{,}6, \qquad v\sin\alpha \cdot t = 100\text{ м}.$$

4. Вдоль берега. Относительно берега лодка движется вниз по течению со скоростью $w = u + v\cos\alpha$. Велосипедист до разворота едет вниз по течению со скоростью V, после — вверх. Направление ON в осях рамы одно и то же на обоих участках. После разворота лодка уходит от велосипедиста вниз по течению, а рама смотрит вверх по течению, так что ON — направление «назад» относительно рамы. Значит, и до разворота лодка смещается «назад» относительно рамы, то есть отстаёт от велосипедиста: $V > w$. Обратите внимание: без этого рассуждения знак в первом уравнении выбрать нельзя. Смещения вдоль берега (за время

каждого участка) равны:

$$(V - w)\,t_1 = 80 \text{ м}, \qquad (V + w)\,t_2 = 380 \text{ м}.$$

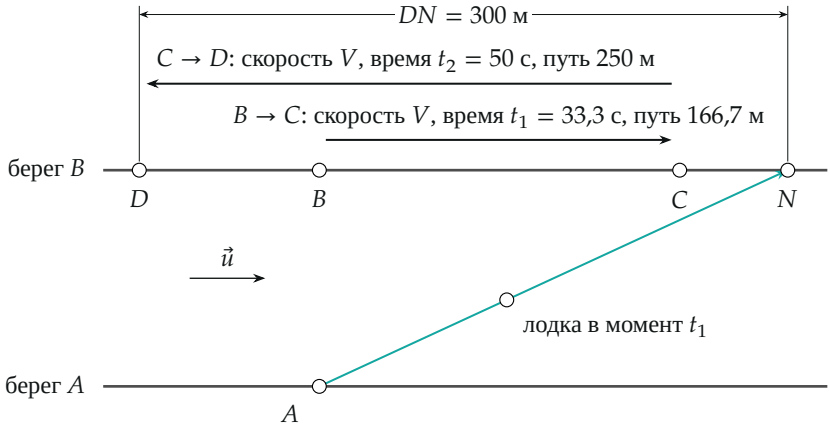
5. Система уравнений. Подставим $w = u + v\cos\alpha = 1 + 0{,}8v$ и $t = \dfrac{100}{0{,}6v}$, $t_1 = 0{,}4t$, $t_2 = 0{,}6t$. Из условия на поперечную скорость $t_1 = \dfrac{200}{3v}$, $t_2 = \dfrac{100}{v}$ (в секундах, v в м/с). Тогда

$$(V - 1 - 0{,}8v)\cdot\frac{200}{3v} = 80 \quad \Rightarrow\ V = 2v + 1,$$
$$(V + 1 + 0{,}8v)\cdot\frac{100}{v} = 380 \quad \Rightarrow\ V = 3v - 1.$$

Неизвестным осталось v: приравниваем, $2v+1 = 3v-1$, откуда $v = 2$ м/с и $V = 5$ м/с. Время плавания $t = \dfrac{100}{0{,}6\cdot 2} = \dfrac{250}{3} \approx 83{,}3$ с, до разворота $t_1 = \dfrac{100}{3} \approx 33{,}3$ с, после — $t_2 = 50$ с.

6. Расстояние BC**.** Велосипедист ехал от B до C ровно время t_1 со скоростью V:

$$S_{BC} = Vt_1 = 5\cdot\frac{100}{3} = \frac{500}{3} \approx 166{,}7 \text{ м}.$$



В системе отсчёта берега: велосипедист проехал $B \to C \to D$, лодка — $A \to N$ по прямой. D — положение велосипедиста, когда лодка причалила в N.

Проверка. Размерности: S_{BC} — метры, v и V — метры в секунду. Проверим рисунок вторым способом, уже по найденным числам. В момент причаливания лодка вдоль берега прошла $wt = 2{,}6 \cdot \dfrac{250}{3} \approx 216{,}7$ м от точки B (напротив A), а велосипедист — $166{,}7 - 5 \cdot 50 = -83{,}3$ м, то есть на 300 м выше по течению. На рисунке ON — гипотенуза треугольника с катетами 12 и 9 клеток, $ON = 15a = 300$ м, совпало. В момент разворота лодка в $(86{,}7;\ 40)$ м, велосипедист в $C = (166{,}7;\ 100)$ м, расстояние $\sqrt{80^2 + 60^2} = 100$ м — радиус дуги LM, тоже совпало.

Физический смысл: рисунок позволил обойтись без скорости и времени «в лоб»: масштаб и перемещения по клеткам превратились в числа, а равномерность поперечной скорости разделила время на 0,4 и 0,6.

Угол α принят острым (лодку сносит вниз по течению). Для тупого α система дала бы другую пару, $v \approx 0{,}48$ м/с и $V \approx 1{,}19$ м/с, но то же $S_{BC} \approx 166{,}7$ м, поскольку два уравнения вдоль берега при любом w дают $V = 2{,}5\,v$, а $S_{BC} = 0{,}4\,Vt = 0{,}4 \cdot 2{,}5\,v \cdot \dfrac{100}{0{,}6\,v}$.

Ответ. $V = 5$ м/с; $v = 2$ м/с; $S_{BC} = \dfrac{500}{3} \approx 166{,}7$ м.