Трение и нейросеть

Задача 1. [МОШ 2025/26, 9 класс, задача 2] На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α ($\operatorname{tg}\alpha = 1/2$) удерживается массивная треугольная призма массой $m = 1$ кг, имеющая в сечении прямоугольный треугольник с острым углом α. Призма лежит на плоскости на боковой грани так, что другая её боковая грань (обращённая вверх) горизонтальна. На этой грани лежит лист бумаги, а на листе бумаги — брусок массой m. Брусок при помощи нитки (невесомой и нерастяжимой) соединён с очень лёгким кольцом, надетым на гладкий вертикальный закреплённый стержень (см. рис. 2). Нить не натянута, но и не провисает, так что движение бруска по горизонтали (в случае освобождения системы) в течение некоторого времени исключено.

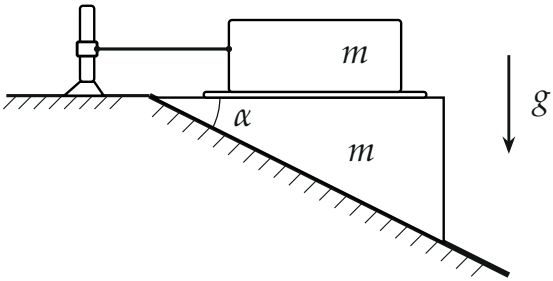


Рис. 2

Коэффициенты трения призмы о бумагу и бруска о бумагу одинаковы и равны μ_1. Коэффициент трения призмы о наклонную плоскость равен μ_2. Предполагается, что $0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1$ и $0 \leqslant \mu_2 \leqslant 1$. Систему освобождают.

1. При каких μ_1 и μ_2 клин начнёт двигаться? Изобразите на плоскости (μ_1, μ_2) область, соответствующую найденным значениям.
2. Ниже приведено решение первого пункта задачи, предложенное известной нейросетью. Верно ли оно? Если да, его можно использовать; если нет, укажите допущенные ошибки.

Брусок удерживается нитью и не имеет горизонтального ускорения. Следовательно, сила трения между бруском и бумагой уравновешивает горизонтальную реакцию со стороны призмы. Максимальная сила трения между бруском и бумагой равна

$$F_{1,\max} = \mu_1 mg.$$

Эта же по модулю сила действует на призму со стороны бумаги (в противоположную сторону) и направлена горизонтально. На призму действуют: её вес mg, вес бруска mg, нормальная реакция плоскости N_2 и сила трения о плоскость F_2.

Полная нормальная реакция наклонной плоскости

$$N_2 = 2mg\cos\alpha.$$

Максимальная сила трения призмы о плоскость

$$F_{2,\max} = 2\mu_2 mg\cos\alpha.$$

Составляющая сил, стремящаяся сдвинуть призму вниз по наклонной плоскости: $2mg\sin\alpha$. Горизонтальная сила трения со стороны бумаги даёт проекцию на наклонную плоскость: $F_{1,\parallel} = F_1\cos\alpha$. В предельном случае $F_1 = \mu_1 mg$, поэтому

$$F_{1,\parallel} = \mu_1 mg\cos\alpha.$$

Условие начала скольжения призмы:

$$2mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha > 2\mu_2 mg\cos\alpha.$$

Сокращая на $mg\cos\alpha$, получаем

$$2\operatorname{tg}\alpha - \mu_1 > 2\mu_2.$$

При $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ окончательно

$$1 - \mu_1 > 2\mu_2, \qquad \mu_2 < \frac{1-\mu_1}{2}.$$

Таким образом, призма начнёт выскальзывать при

$$\mu_2 < \frac{1-\mu_1}{2}, \qquad 0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant \mu_2 \leqslant 1.$$

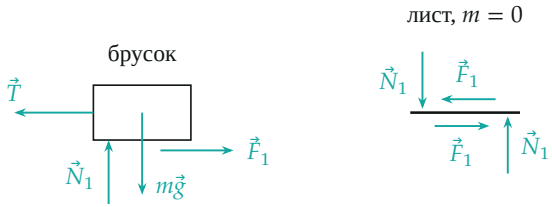
На плоскости (μ_1, μ_2) это область ниже прямой $\mu_2 = \dfrac{1-\mu_1}{2}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Призма стремится соскользнуть по склону. Её верхняя грань горизонтальна, поэтому при движении она тянет бумагу, бумага тянет брусок, а нить удерживает брусок на месте по горизонтали. Значит, между бумагой и призмой возникает трение скольжения — горизонтальная сила, направленная против движения призмы (влево). У неё две составляющие: одна по склону и одна перпендикулярно склону, и вторая прижимает призму к плоскости, увеличивая трение о неё. Главная идея: призма сдвинется, когда её ускорение вдоль склона вниз станет положительным; граница области — нулевое ускорение.

Обозначения. Ось s направим вдоль склона вниз, ось n — перпендикулярно склону вверх; a — проекция ускорения призмы на ось s. N_1 — сила, с которой лист давит на брусок и на призму (вертикальная), F_1 — сила трения между листом и бруском или призмой, T — натяжение нити, N_2 и F_2 — нормальная реакция и сила трения со стороны наклонной плоскости. Все четыре силы N_1, F_1, N_2, F_2 показаны на рисунках ниже.

Пункт 1.

1. Лист. Лист невесом, поэтому сумма сил на него равна нулю. Значит, силы трения, действующие на него со стороны бруска и призмы, равны по модулю и противоположны; так же равны и нормальные силы. Поэтому и брусок, и призма получают от листа одни и те же N_1 и F_1 (рис. ниже). При движении призмы лист скользит по бруску или по призме, и по закону Амонтона — Кулона $F_1 = \mu_1 N_1$ (коэффициенты одинаковы, так что неважно, по какой стороне листа идёт скольжение).



Силы на брусок и на лист. На брусок трение $\vec{F}_1$ направлено вправо (по движению призмы), его удерживает $\vec{T}$; на лист силы $\vec{F}_1$ и $\vec{N}_1$ от бруска и от призмы равны и противоположны.

2. Брусок. Запишем второй закон Ньютона для бруска векторно: $m\vec{a}_{\text{бр}} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F}_1$. Горизонтальной скорости у бруска нет (нить), поэтому в проекции на горизонталь $0 = F_1 - T$: нить сама подбирает натяжение. По вертикали брусок лежит на горизонтальной грани призмы, которая вместе с призмой едет вниз по склону с ускорением a, то есть вертикальное ускорение грани равно $a\sin\alpha$ (вниз); кольцо скользит по гладкому стержню и вертикальному движению не мешает. Для бруска в проекции на вертикаль:

$$mg - N_1 = ma\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad N_1 = m\,(g - a\sin\alpha).$$

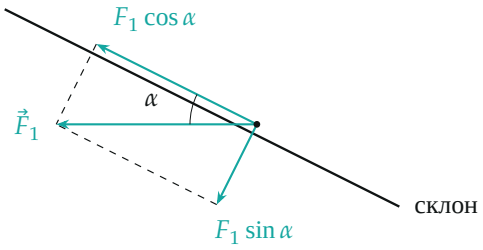
3. Призма. Запишем второй закон Ньютона для призмы в проекциях на оси s и n. Горизонтальная сила $\vec{F}_1$ (направлена влево) имеет проекции $-F_1\cos\alpha$ на ось s и $-F_1\sin\alpha$ на ось n; вертикальная N_1 (вниз) — $N_1\sin\alpha$ и $-N_1\cos\alpha$; вес призмы mg — $mg\sin\alpha$ и $-mg\cos\alpha$. Вдоль оси n призма не движется:

$$N_2 - mg\cos\alpha - N_1\cos\alpha - F_1\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_2 = (mg + N_1)\cos\alpha + F_1\sin\alpha.$$

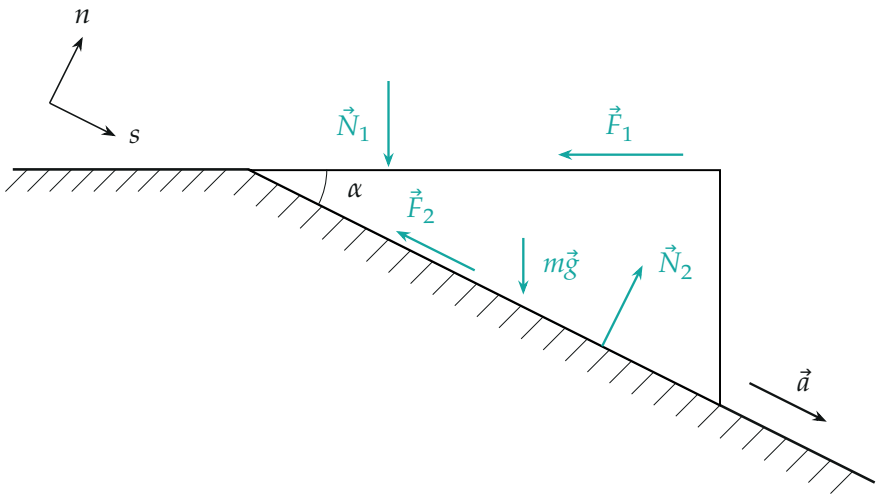
Вдоль оси s призма скользит по плоскости, значит, $F_2 = \mu_2 N_2$:

$$ma = mg\sin\alpha + N_1\sin\alpha - F_1\cos\alpha - \mu_2 N_2.$$

Обратите внимание: в N_2 входит и $F_1\sin\alpha$ — составляющая горизонтальной силы, перпендикулярная склону. Она прижимает призму к плоскости: нормальная реакция больше, чем $2mg\cos\alpha$.



Горизонтальную силу $\vec{F}_1$ раскладываем по склону и поперёк него: вдоль склона вверх идёт $F_1 \cos\alpha$ (она тормозит призму), вглубь склона — $F_1 \sin\alpha$ (она увеличивает N_2).



Силы на призму. Силы $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_1$ от листа приложены к верхней грани, $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_2$ — к грани на склоне.

4. Ускорение призмы. Подставим N_1 из пункта 2 и $F_1 = \mu_1 N_1$. Вес и массу m сократим. После подстановки уравнение вдоль оси s даёт

$$a\,D = g\big[\,2\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha - \mu_2\,(2\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha)\,\big],$$

$$D = 1 + \sin^2\alpha - (\mu_1 + \mu_2)\sin\alpha\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin^2\alpha.$$

Множитель D положителен: он убывает с ростом μ_1 и μ_2, а при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ равен $1 - \sin 2\alpha = 0{,}2 > 0$. Значит, знак a совпадает со знаком

квадратной скобки, и призма начинает двигаться (граница — $a = 0$), когда

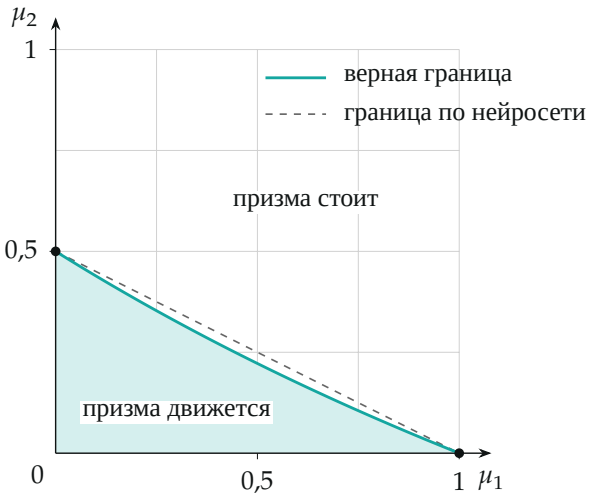
$$2\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha > \mu_2\,(2\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha) \;\Rightarrow\; \mu_2 < \frac{2\operatorname{tg}\alpha - \mu_1}{2 + \mu_1\operatorname{tg}\alpha},$$

а при $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\mu_2 < \frac{1-\mu_1}{2+\mu_1/2} = \frac{2\,(1-\mu_1)}{4+\mu_1}.$$

На самой границе $a = 0$, поэтому $N_1 = mg$ и $N_2 = 2mg\cos\alpha + \mu_1 mg\sin\alpha$: именно это значение стоит в неравенстве. Тот же ответ даёт и условие покоя: покоящаяся призма удерживается трением покоя о лист (не больше $\mu_1 mg$) и о плоскость (не больше $\mu_2 N_2$); оба трения помогают удержать её, и покой возможен, пока их максимальных значений хватает, — это ровно противоположное неравенство.

5. Область на плоскости (μ_1, μ_2)**.** Граница — гипербола $\mu_2 = \dfrac{10}{4+\mu_1} - 2$ от $(0;\,0{,}5)$ до $(1;\,0)$. Она выпукла вниз и лежит ниже хорды между этими точками; например, при $\mu_1 = 0{,}5$ она проходит через $\mu_2 = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}22$. Призма движется в закрашенной области: вблизи начала координат, ниже кривой.



Область, где призма сдвинется (закрашена). Штриховая прямая — граница по решению нейросети, она лежит выше верной и объявляет «движущимися» лишние пары (μ_1, μ_2).

Пункт 2. Решение нейросети неверно. Главная ошибка — формула $N_2 = 2mg\cos\alpha$. Она верна, только если на призму, кроме её веса и веса бруска, не действует других сил с составляющей перпендикулярно склону. Но сила трения от листа горизонтальна, и её составляющая $F_1\sin\alpha$ перпендикулярна склону, прижимает призму к плоскости. Правильно $N_2 = 2mg\cos\alpha + \mu_1 mg\sin\alpha$: нейросеть взяла «статическую» реакцию (как у системы без силы $\vec{F}_1$) вместо «динамической». Из-за этого максимальное трение о плоскость занижено на $\mu_1\mu_2 mg\sin\alpha$, а условие начала скольжения — завышено: правильная граница $\mu_2 = \dfrac{2(1-\mu_1)}{4+\mu_1}$ ниже прямой $\mu_2 = \dfrac{1-\mu_1}{2}$ при всех $0 < \mu_1 < 1$ (они совпадают лишь при $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 = 1$).

Пример, где выводы расходятся: $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = 0{,}23$. Нейросеть считает $0{,}23 < \dfrac{1-0{,}5}{2} = 0{,}25$ и объявляет, что призма поедет. По верной формуле $2 - 2\mu_1 - 4\mu_2 - \mu_1\mu_2 = 2 - 1 - 0{,}92 - 0{,}115 < 0$, ускорение отрицательно — призма стоит.

Мелкие неточности: трение о лист уравновешивает не «реакция со

стороны призмы», а натяжение нити, а mg — сила тяжести, а не вес.

Проверка. При $\mu_1 = 0$ (лист скользкий) брусок давит на призму силой mg, но трения о лист нет, и призма с грузом $2m$ скользит, если $\mu_2 < \operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ — совпадает с формулой. При $\mu_1 = 1$ числитель $2\operatorname{tg}\alpha - \mu_1 = 0$: лист держит призму так, что она не двигается ни при каком $\mu_2 \geqslant 0$, поэтому область заканчивается ровно в точке $(1;\,0)$ — числа условия подобраны именно так.

Физический смысл: трение о лист удерживает призму ($-\mu_1 \cos\alpha$ в числителе), но и прижимает её к склону ($+\mu_1 \sin\alpha$ множителем при μ_2) — оба эффекта уменьшают область движения; нейросеть учла только первый.

Ответ. 1) клин начнёт двигаться при $\mu_2 < \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha - \mu_1}{2 + \mu_1 \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2(1-\mu_1)}{4+\mu_1}$ (область под гиперболой от $(0;\,0{,}5)$ до $(1;\,0)$); 2) решение нейросети неверно: вместо $N_2 = 2mg\cos\alpha$ нужно $N_2 = 2mg\cos\alpha + \mu_1 mg\sin\alpha$ (не учтена составляющая силы трения о лист, перпендикулярная склону), поэтому её область слишком велика.