Эффект Магнуса

Задача 1. [МОШ 2025/26, 9 класс, задача 3] В спортивных играх с мячом широко применяются кручёные удары, при которых мячу сообщается не только поступательная скорость, но и вращение. В результате мяч движется по сложной траектории и при определённых условиях отклоняется в сторону от вертикальной плоскости, содержащей вектор начальной скорости.

Такая траектория мяча объясняется эффектом Магнуса. Взаимодействие вращающегося мяча с воздухом количественно характеризуется двумя силами: силой сопротивления F_D (направленной противоположно скорости центра мяча) и силой Магнуса F_M, направленной перпендикулярно скорости (см. рис. 3) и также перпендикулярно оси вращения. В этой задаче считается, что ось вращения перпендикулярна направлению скорости центра мяча.

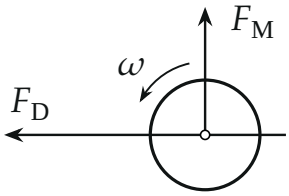


Рис. 3

В первом приближении можно считать, что эти силы задаются формулами:

$$F_D = C_D v^2, \qquad F_M = C_M \omega v,$$

где C_D и C_M — постоянные коэффициенты, v — скорость центра мяча, ω — угловая скорость его вращения (предполагается, что в процессе полёта она не изменяется).

Анализ движения вращающегося тела в поле тяжести при наличии аэродинамических сил достаточно сложен. Поэтому далее мы пренебрежём силой тяжести и ограничимся рассмотрением плоского движения мяча под действием только двух сил: лобового сопротивления F_D и силы Магнуса F_M.

1. Пусть $C_D = 0$, то есть сила сопротивления отсутствует. Известны величины C_M, ω и m. Мяч вылетает из точки A со скоростью v_0 под углом $\alpha = 30°$ к горизонтальной прямой. Найдите расстояние AB, где B — точка повторного пересечения траектории с этой прямой.
2. В этом пункте $C_D \neq 0$. Мяч массой $m = 3$ г вылетает со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Угловая скорость вращения $\omega = 100$ рад/с. Траектория движения мяча за промежуток времени $t_0 = 0{,}5$ с показана на рис. 4. Этот график получен методом численного моделирования; копия графика представлена на листе 4, см. рис. 7.

   Зависимость модуля скорости мяча от времени $v(t)$ за тот же промежуток приведена на рис. 5. Используя графики, определите коэффициенты C_D и C_M с максимально возможной точностью.

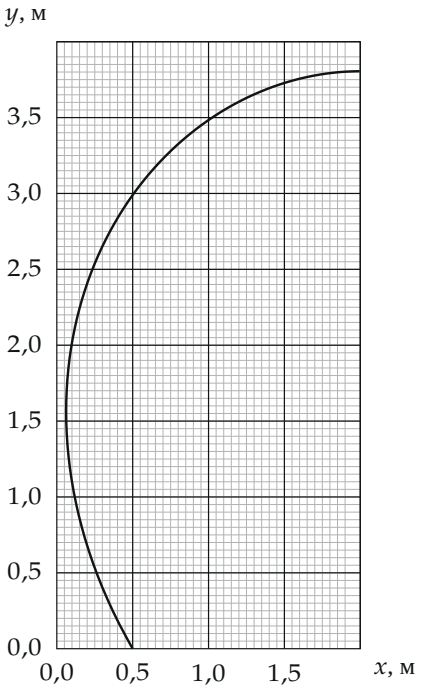


Рис. 4

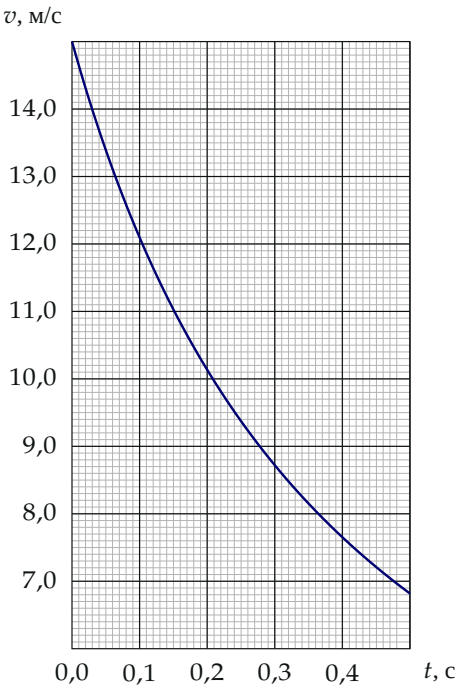


Рис. 5

Масса 3 г и указанные кинематические параметры типичны для мяча в настольном теннисе при кручёных ударах средней силы.

Копия графика траектории (рис. 7) для работы:

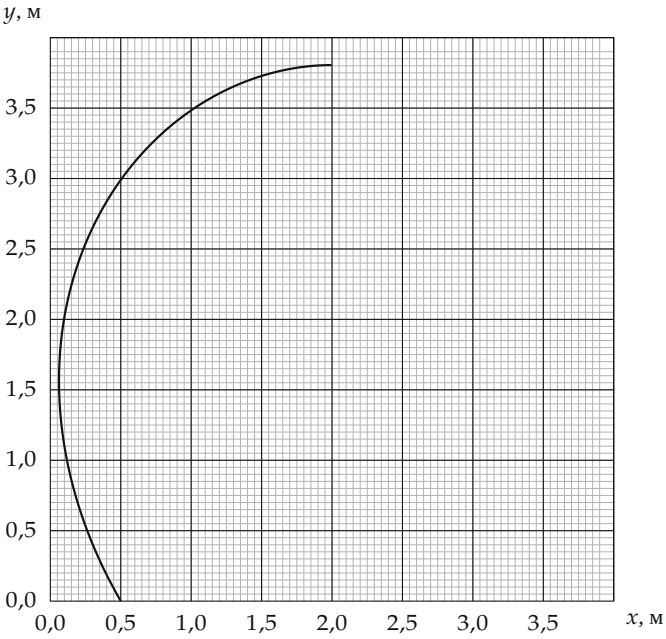
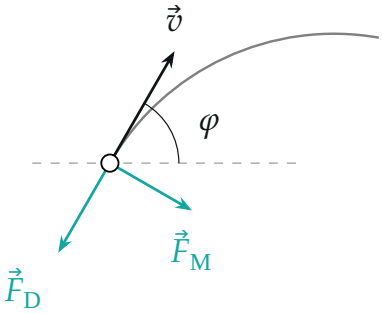


Рис. 7: траектория движения мяча, к задаче 4

▲ **Решение. Что происходит.** Сила Магнуса $F_{\text{M}} = C_{\text{M}}\omega v$ перпендикулярна скорости, поэтому работы не совершает и модуль скорости не меняет: она только поворачивает вектор скорости, как центростремительная сила. Сила сопротивления $F_{\text{D}} = C_{\text{D}}v^2$ направлена против скорости и, наоборот, меняет только модуль, не поворачивая вектор. Эти два действия разделяются, если записать второй закон Ньютона по касательной к траектории и по нормали. В первом пункте сопротивления нет — получается равномерное движение по окружности. Во втором пункте главная идея: убывание скорости на графике $v(t)$ даёт C_{D}, а скорость поворота вектора скорости, найденная по траектории, даёт C_{M}.

Обозначения. v — модуль скорости; φ — угол между вектором скорости и осью x (против часовой стрелки); $\Omega = |d\varphi/dt|$ — угловая скорость

поворота вектора скорости. Силой тяжести пренебрегаем, как сказано в условии.



Мяч в произвольной точке траектории: сопротивление $\vec{F}_D$ направлено против скорости $\vec{v}$, сила Магнуса $\vec{F}_M$ — по нормали к ней, к центру кривизны.

Пункт 1.

1. Окружность. При $C_{\mathrm{D}} = 0$ единственная сила на мяч — $\vec{F}_{\mathrm{M}}$, и она всё время перпендикулярна скорости. Запишем второй закон Ньютона для мяча в проекции на касательную к траектории: $m\,dv/dt = 0$, значит, $v = v_0$ постоянна. В проекции на нормаль мяч движется с центростремительным ускорением v_0^2/R, где R — радиус кривизны траектории:

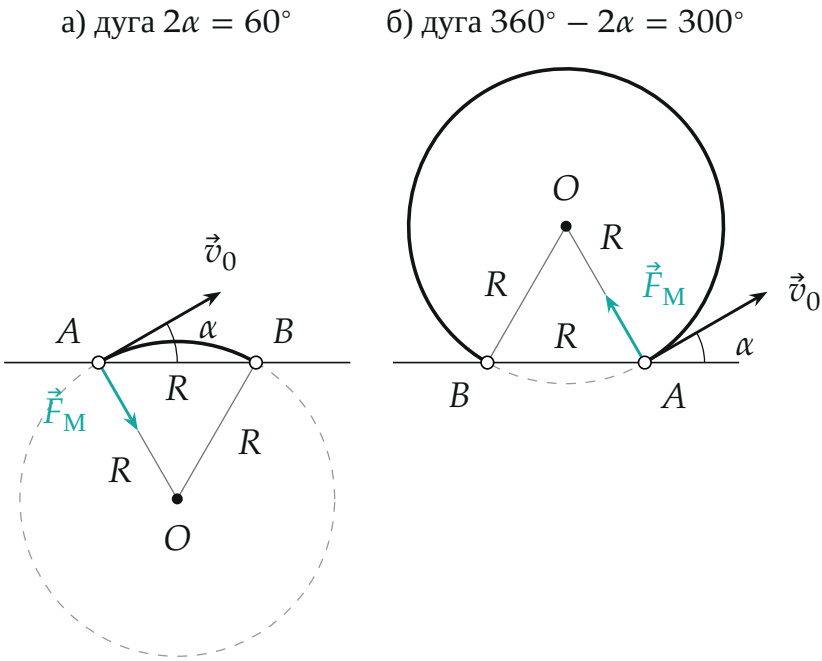
$$m\frac{v_0^2}{R} = C_{\mathrm{M}}\,\omega v_0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv_0}{C_{\mathrm{M}}\,\omega} = \text{const}.$$

Постоянны и скорость, и R — траектория есть дуга окружности радиуса R.

2. Точка B**.** Окружность пересекает прямую AB в двух точках — A и B, так что AB — хорда. Скорость $\vec{v}_0$ в точке A касается окружности и образует с прямой угол $\alpha = 30°$. Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую стягивает хорда; значит, дуга AB равна $2\alpha = 60°$, а треугольник OAB с центром O — равнобедренный с углом $60°$ при вершине, то есть равносторонний:

$$AB = 2R\sin\alpha = 2R\cdot\frac{1}{2} = R = \frac{mv_0}{C_{\mathrm{M}}\,\omega}.$$

Обратите внимание: в условии не сказано, в какую сторону закручивает сила Магнуса. Если центр окружности лежит по другую сторону от прямой, мяч пройдёт не короткую дугу в 60°, а длинную в 300° и встретит прямую слева от A, но хорда останется той же длины $2R\sin\alpha$, так что ответ один и тот же.



Два возможных случая: хорда AB равна R при любом направлении силы Магнуса.

Пункт 2.

3. Две независимые величины. Запишем второй закон Ньютона для мяча в проекциях на касательную и на нормаль. Вдоль скорости действует только сопротивление, поперёк — только сила Магнуса, а центростремительное ускорение равно $v\Omega$:

$$m\frac{dv}{dt} = -C_D\,v^2, \qquad mv\,\Omega = C_M\,\omega v \;\Rightarrow\; \Omega = \frac{C_M\,\omega}{m} = \text{const}.$$

Скорость v сокращается: вектор скорости поворачивается равномерно,

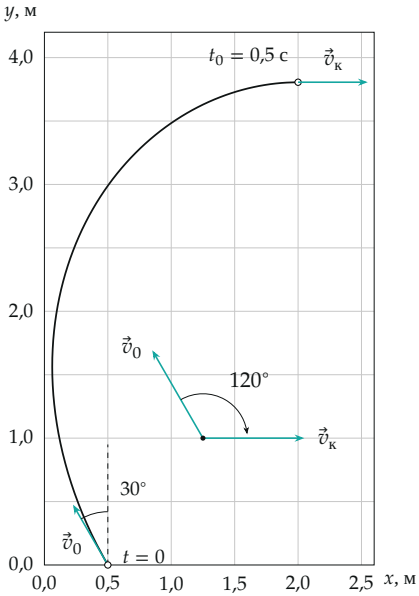
независимо от того, как падает его модуль. Поэтому $C_\text{М}$ ищем по углу поворота, а C_D — по убыванию v.

4. Коэффициент $C_\text{М}$. Угол поворота вектора скорости за время t_0 равен $\Delta\varphi = \Omega t_0$. Определим его по рисунку 4 (рисунок 7 — его копия для работы). В начале скорость направлена под 30° к вертикали, то есть под углом 120° к оси x: кривая выходит из точки $(0{,}5;\ 0)$ вверх и влево. В конце траектории, в точке $(2{,}0;\ 3{,}8)$, кривая подходит к правой границе графика горизонтально — скорость направлена вдоль оси x ($\varphi = 0$). Мяч поворачивал по часовой стрелке, значит, $\Delta\varphi = 120^\circ = 2\pi/3$:

$$\Omega = \frac{2\pi/3}{t_0} = \frac{2{,}09}{0{,}5\ \text{с}} = 4{,}19\ \text{с}^{-1},$$

$$C_\text{М} = \frac{m\Omega}{\omega} = \frac{3\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot 4{,}19\ \text{с}^{-1}}{100\ \text{с}^{-1}} \approx 1{,}26\cdot 10^{-4}\ \text{кг}.$$

Погрешность угла $\pm 1^\circ$ даёт $\pm 1\,\%$ в $C_\text{М}$ — это и есть точность, на которую способен рисунок.



Повороты вектора скорости: от $\vec{v}_0$ (под 30° к вертикали) до $\vec{v}_к$ (вдоль оси

x) — 120°. В середине рисунка оба вектора перенесены в одну точку.

Второй способ для C_M. Проверим Ω ещё по одной точке траектории — там, где касательная вертикальна: это крайняя левая точка кривой $(0{,}06;\ 1{,}56)$. Вектор скорости дошёл до 90°, то есть повернулся на $30° = \pi/6$, за время $\pi/(6\Omega) = 0{,}125$ с. Путь до неё по графику $v(t)$ — площадь под кривой от нуля до 0,125 с: $\dfrac{15{,}0 + 11{,}5}{2} \cdot 0{,}125 \approx 1{,}65$ м; длина дуги траектории от $(0{,}5;\ 0)$ до $(0{,}06;\ 1{,}56)$ — около 1,63 м. Значения совпали в пределах 2 %.

5. Коэффициент C_D. Первое из уравнений пункта 3 разделим на v^2: $-\dfrac{dv}{v^2} = \dfrac{C_D}{m}\,dt$, то есть $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{v}\right) = \dfrac{C_D}{m}$. Значит, величина $1/v$ линейно растёт со временем:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{C_D}{m}\,t.$$

Считаем с графика $v(t)$ шесть точек и строим $1/v$:

t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
v, м/с	15,0	12,1	10,1	8,7	7,65	6,8
$1/v$, с/м	0,0667	0,0826	0,0990	0,1149	0,1307	0,1471

Точки ложатся на прямую — это подтверждает квадратичный закон сопротивления. Наклон прямой между крайними точками

$$\frac{0{,}1471 - 0{,}0667}{0{,}5\ \text{с}} = 0{,}161\ \text{м}^{-1}$$

(по методу наименьших квадратов — 0,1606), откуда

$$C_D = m \cdot 0{,}161\ \text{м}^{-1} = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot 0{,}161\ \text{м}^{-1} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{кг/м}.$$

Обратите внимание: касательная к $v(t)$ в нуле даёт $dv/dt = -C_D v_0^2/m$, но проводить её по рисунку на глаз неточно; прямолинейный график $1/v$ использует всю кривую сразу.

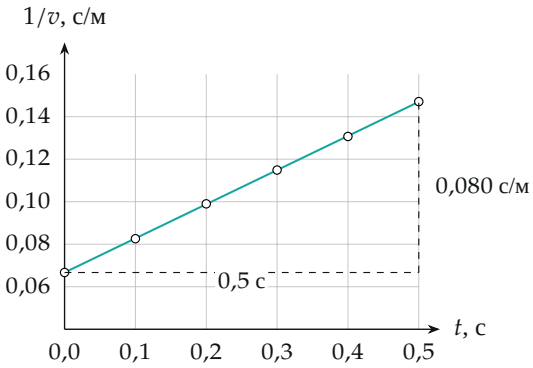


График $1/v$ от t по значениям с рис. 5: точки лежат на прямой, её наклон равен C_D/m.

Проверка. Размерности: $[C_\text{M}] = \dfrac{\text{Н}}{\text{с}^{-1}\cdot\text{м/с}} = \text{кг}$, $[C_\text{D}] = \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2/\text{с}^2} =$ кг/м — как в ответах. Полная проверка — подставить найденные коэффициенты в уравнения движения и пересчитать траекторию (численно, python): кривая проходит через точки графика $(0{,}5;\ 3{,}0)$, $(1{,}0;\ 3{,}5)$, $(2{,}0;\ 3{,}8)$ и заканчивается в $(2{,}0;\ 3{,}81)$, где касательная горизонтальна, а скорость к концу равна 6,8 м/с, как на рис. 5. Предел: при $C_\text{D} = 0$ из пункта 1 радиус окружности $R = mv_0/(C_\text{M}\omega) = 3{,}6$ м — он же радиус кривизны траектории в начале пункта 2, так как там $\Omega = v_0/R$.

Физический смысл: сила Магнуса поворачивает вектор скорости равномерно по времени, а сопротивление уменьшает скорость; чем медленнее мяч, тем меньше радиус v/Ω и тем круче загибается траектория.

Ответ. 1) $AB = R = \dfrac{mv_0}{C_\text{M}\,\omega}$; 2) $C_\text{M} \approx 1{,}26\cdot10^{-4}$ кг (по повороту вектора скорости на 120° за 0,5 с), $C_\text{D} \approx 4{,}8\cdot10^{-4}$ кг/м (по наклону графика $1/v(t)$).