Нелинейные элементы

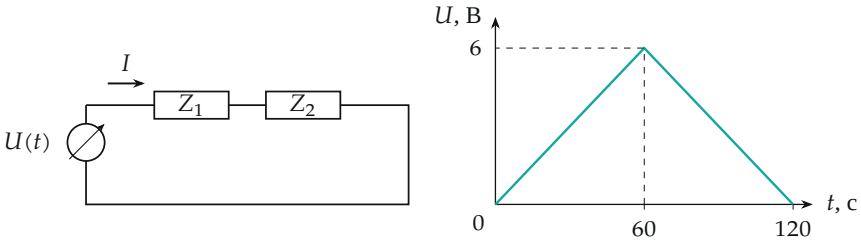
Задача 1. [МОШ 2025/26, 9 класс, задача 4] Рассмотрим нелинейные элементы Z_1 и Z_2, сопротивление которых зависит от напряжения на их выводах.

При увеличении напряжения на элементе Z_1 от нуля его сопротивление составляет 100 Ом вплоть до 1,999 В. В узком интервале от 1,999 В до 2,001 В оно линейно возрастает до 200 Ом, после чего остаётся постоянным. Сопротивление элемента Z_2 изменяется противоположным образом: до 1,999 В оно равно 200 Ом, в интервале от 1,999 В до 2,001 В линейно уменьшается до 100 Ом и далее не изменяется.

При анализе цепи следует учитывать конечную ширину переходной области. Однако при построении итоговых графиков этой шириной (0,002 В) можно пренебречь.

1. Изобразите вольт-амперные характеристики элементов Z_1 и Z_2. Напомним, что вольт-амперной характеристикой (ВАХ) называется зависимость силы тока, протекающего через элемент, от напряжения на нём (ток откладывается по оси ординат, напряжение — по оси абсцисс). Рассмотрите только положительные значения этих величин; на графиках отметьте координаты точек излома.
2. Элементы Z_1 и Z_2 соединили последовательно и подключили к регулируемому источнику напряжения. Начиная с некоторого момента напряжение на выводах этого соединения равномерно увеличивается от нуля и через одну минуту достигает 6 В. Затем оно так же равномерно уменьшается и снова становится равным нулю к концу второй минуты опыта.

   Изобразите график зависимости силы тока в цепи от времени $I(t)$. На графике необходимо отметить координаты точек излома, а также локальных максимумов и минимумов тока.



Поясняющий рисунок: цепь из двух элементов и зависимость напряжения источника от времени.

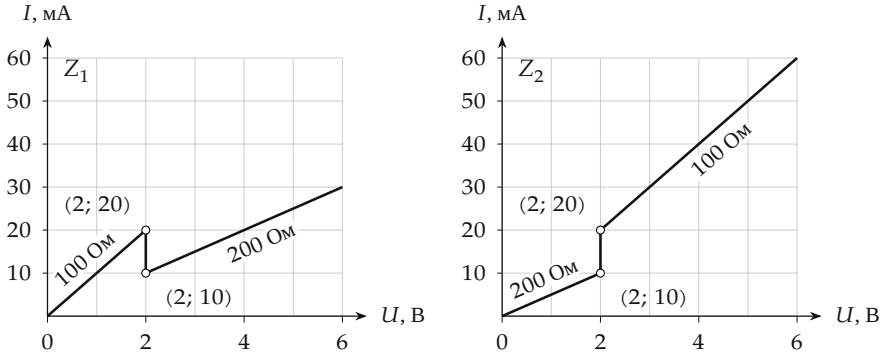
▲ **Решение. Что происходит.** Каждый элемент — резистор, сопротивление которого зависит от напряжения на нём. Ток через него $I = U/R(U)$, поэтому ВАХ состоит из двух прямых, соединённых почти вертикальным скачком при $U \approx 2$ В: у Z_1 сопротивление там удваивается, и ток падает, у Z_2 — уменьшается вдвое, и ток растёт. В последовательной цепи ток общий, а напряжения складываются: $U_1 + U_2 = U(t)$. Главная идея второго пункта: на вертикальном участке своей ВАХ элемент Z_2 держит ровно 2 В при любом токе от 10 до 20 мА, то есть работает как стабилизатор. Пока он там, всё остальное напряжение достаётся Z_1, и ток находится прямо по ВАХ Z_1.

Обозначения. I — общий ток, U_1 и U_2 — напряжения на Z_1 и Z_2, $U(t)$ — напряжение на цепи. Токи в миллиамперах, напряжения в вольтах, время в секундах, сопротивления в омах: 100 Ом = 0,1 кОм даёт 10 мА на вольт.

Пункт 1.

1. ВАХ Z_1. Пока $U_1 < 2$ В, $R_1 = 100$ Ом и $I = U_1/100$: прямая от начала координат до точки (2 В; 20 мА). Затем за 0,002 В сопротивление вырастает до 200 Ом, и ток падает от 20 до 10 мА (вертикальный отрезок, ширина 2 мВ на графике не видна). Дальше $R_1 = 200$ Ом: $I = U_1/200$ — прямая из точки (2 В; 10 мА).

2. ВАХ Z_2. Наоборот: $I = U_2/200$ до точки (2 В; 10 мА), затем скачок вверх до 20 мА и далее $I = U_2/100$ — прямая из точки (2 В; 20 мА). Точки излома обоих графиков — (2 В; 10 мА) и (2 В; 20 мА).



ВАХ элементов. Вертикальные отрезки — переходная область шириной 2 мВ; на них ток принимает все значения от 10 до 20 мА при $U \approx 2$ В.

Обратите внимание: ВАХ Z_1 немонотонна — ток сначала растёт, потом падает на скачке и снова растёт. Поэтому одному значению тока в диапазоне 10–20 мА может отвечать три напряжения на Z_1, а для Z_2 — наоборот, одному напряжению 2 В соответствуют все токи от 10 до 20 мА. Именно это второе свойство и работает в пункте 2.

Пункт 2.

3. Напряжение на цепи. Напряжение растёт равномерно от 0 до 6 В за 60 с, то есть $U(t) = 0{,}1\,t$ в вольтах при $0 \le t \le 60$ с, а затем убывает: $U(t) = 0{,}1\,(120 - t)$ при $60 \le t \le 120$ с.

4. Начало: $U < 3$ В. Пока оба напряжения меньше 2 В, $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом, общее сопротивление 300 Ом, ток $I = U/300$, а напряжения делятся пропорционально сопротивлениям: $U_1 = U/3$, $U_2 = 2U/3$. Напряжение U_2 достигает 2 В при $U = 3$ В, то есть при $t = 30$ с, и ток при этом равен 10 мА.

5. Стабилизация: 3 В $< U <$ 6 В. Докажем, что в этом диапазоне $U_2 = 2$ В. Предположим, что $U_2 < 2$ В. Тогда $R_2 = 200$ Ом и $I = U_2/200 < 10$ мА, а $U_1 = U - U_2 > U - 2 > 1$ В. При 1 В $< U_1 <$ 2 В ток через Z_1 равен $U_1/100 > 10$ мА, а при $U_1 \geqslant 2$ В — не меньше $U_1/200 \geqslant 10$ мА. В обоих случаях ток больше 10 мА, что противоречит $I < 10$ мА. Предположим теперь, что $U_2 > 2$ В. Тогда $R_2 = 100$ Ом и $I = U_2/100 > 20$ мА, а $U_1 < U - 2 < 4$ В. Но ток через Z_1 при $U_1 < 4$ В не больше 20 мА (прямая до $U_1 = 2$ В даёт не более 20 мА, а дальше

$U_1/200 < 20$ мА) — снова противоречие. Остаётся $U_2 = 2$ В: элемент Z_2 стоит на вертикальном участке ВАХ, и его ток $10\text{ мА} \le I \le 20$ мА определяется остальной цепью.

6. Ток по ВАХ Z_1. При $U_2 = 2$ В на Z_1 приходится $U_1 = U - 2$, и $I = I_1(U_1)$ — ток по ВАХ Z_1, где $I_1(U_1)$ однозначна:

- $3\text{ В} < U < 4\text{ В}$ ($30 < t < 40$ с): $U_1 < 2$ В, $R_1 = 100$ Ом, $I = \dfrac{U-2}{100}$ — растёт от 10 до 20 мА.
- $U = 4$ В ($t = 40$ с): $U_1 = 2$ В, элемент Z_1 входит в переходную область, его сопротивление удваивается и ток падает до 10 мА. Остаётся $U_2 = 2$ В — Z_2 просто возвращается к $R_2 = 200$ Ом, нижнему краю вертикального участка.
- $4\text{ В} < U < 6$ В ($40 < t < 60$ с): $R_1 = 200$ Ом, $I = \dfrac{U-2}{200}$ — снова от 10 до 20 мА. При $U = 6$ В ($t = 60$ с) $I = 20$ мА — верхний край вертикального участка Z_2.

7. Уменьшение напряжения. Правило пункта 5 не зависит от истории, и ток для каждого U определён однозначно, поэтому график после $t = 60$ с — зеркальное отражение. $60 < t < 80$ с: $I = (U-2)/200$ падает от 20 до 10 мА. При $U = 4$ В ($t = 80$ с) U_1 снова равно 2 В, сопротивление Z_1 возвращается к 100 Ом, и ток скачком растёт от 10 до 20 мА. $80 < t < 90$ с: $I = (U-2)/100$ падает от 20 до 10 мА (на $t = 90$ с $U = 3$ В). Дальше стабилизации нет: оба элемента на первых ветвях, $I = U/300$ до нуля при $t = 120$ с.

8. Итог в мА. Собираем ответ, подставив $U = 0{,}1\,t$ и $U = 0{,}1(120-t)$:

$$I(t) = \begin{cases} t/3, & 0 \le t \le 30, \\ t - 20, & 30 \le t < 40, \\ (t-20)/2, & 40 \le t \le 60, \\ (100-t)/2, & 60 \le t < 80, \\ 100 - t, & 80 \le t \le 90, \\ (120-t)/3, & 90 \le t \le 120. \end{cases}$$

Точки излома и скачков: $(30;\,10)$, $(40;\,20) \;\to\; (40;\,10)$, $(60;\,20)$,

(80; 10) → (80; 20), (90; 10) и конец (120; 0). Локальные максимумы тока 20 мА — при $t = 40$ с, 60 с и 80 с; локальные минимумы 10 мА — в точках $t = 40$ с и 80 с сразу после падения; точки (30; 10) и (90; 10) — изломы, а не минимумы: ток через них монотонно растёт (убывает), меняется только скорость роста.

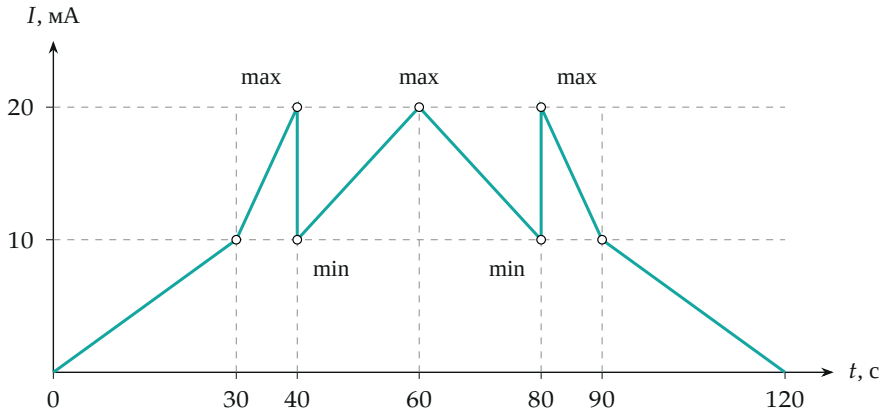
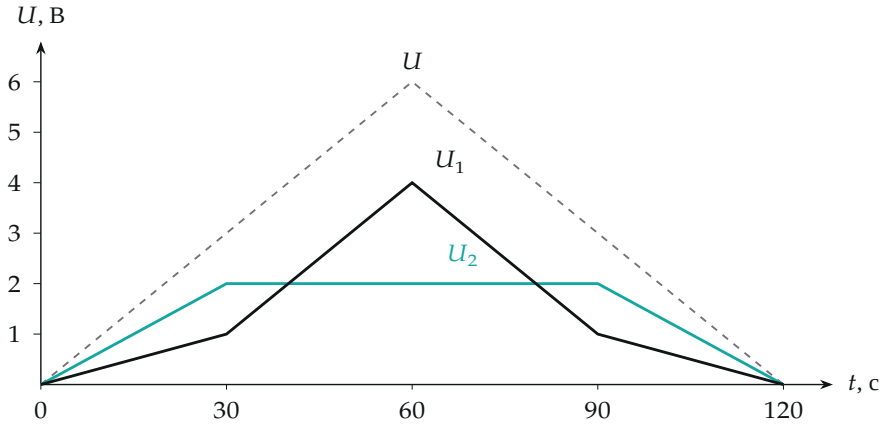


График $I(t)$. Вертикальные отрезки при $t = 40$ с и $t = 80$ с — скачки тока (ширина области переключения 0,02 с на графике не видна).



Напряжения на элементах: при $30 < t < 90$ с Z_2 держит 2 В, а Z_1 получает всё остальное. Именно по графику $U_1(t)$ и ВАХ Z_1 находится ток.

Обратите внимание: ток при $t = 40$ с и 80 с нельзя «сгладить». Пренебрегать шириной 2 мВ можно, но ток при этом именно скачком падает или растёт: за 0,02 с напряжение U меняется на те же 2 мВ, пока Z_1 проходит переходную область.

Проверка. Подставим $t = 50$ с: $U = 5$ В, ток $(50 - 20)/2 = 15$ мА. Тогда $U_1 = 200 \cdot 0{,}015 = 3$ В, $U_2 = 2$ В (ток 15 мА лежит между 10 и 20 мА), сумма 5 В — верно. $t = 35$ с: $U = 3{,}5$ В, $I = 15$ мА, $U_1 = 100 \cdot 0{,}015 = 1{,}5$ В, $U_2 = 2$ В, сумма 3,5 В — верно. Численно (python) решена система $U_1 + U_2 = U$ с учётом переходной области в 2 мВ: для $U = 3{,}5;\ 5;\ 6$ В получено 15,0; 15,0; 20,0 мА, а при $U = 3{,}99;\ 4{,}001$ В — 19,9 и 10,0 мА — ровно ток графика. Размерность: $[U/R] = \text{В}/\text{Ом} = \text{А}$.

Физический смысл: Z_2 как стабилитрон «забирает» 2 В, поэтому ток при $3 < U < 6$ В полностью определяется ВАХ Z_1 при напряжении $U - 2$; скачки тока — это скачки Z_1 при его 2 В, то есть при $U = 4$ В. Ток зависит только от напряжения, а не от того, растёт оно или убывает, поэтому график симметричен относительно $t = 60$ с.

Ответ. 1) Z_1: $I = U/100$ до $(2\text{ В};\ 20\text{ мА})$, скачок вниз до $(2\text{ В};\ 10\text{ мА})$, далее $I = U/200$; Z_2: $I = U/200$ до $(2\text{ В};\ 10\text{ мА})$, скачок вверх до $(2\text{ В};\ 20\text{ мА})$, далее $I = U/100$. 2) график $I(t)$ — ломаная через точки $(0;\ 0)$, $(30;\ 10)$, $(40;\ 20)$, скачок до $(40;\ 10)$, $(60;\ 20)$, $(80;\ 10)$, скачок до $(80;\ 20)$, $(90;\ 10)$, $(120;\ 0)$ (время в с, ток в мА).