Через призму

Задача 1. [МОШ 2025/26, 9 класс, задача 5] На рис. 6 приведена фотография листа с текстом олимпиадного задания, на котором лежит прозрачная призма с сечением в форме равностороннего треугольника. Снимок сделан с большого расстояния длиннофокусным объективом, оптическую ось которого старались ориентировать перпендикулярно плоскости листа. Увеличенное изображение этой фотографии приведено на листе 4, см. рис. 8.

1. Используя линейку, определите по фотографиям показатель преломления материала призмы с наилучшей возможной точностью.

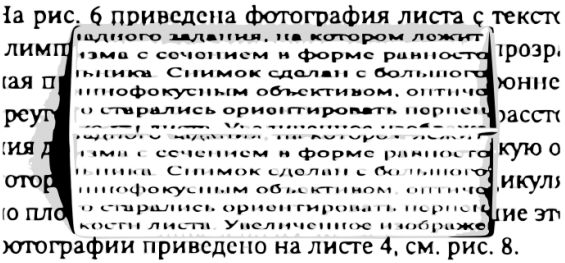
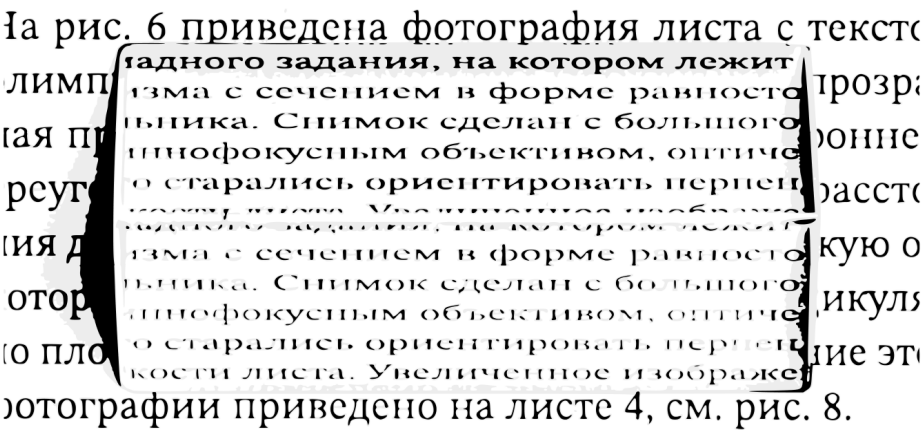


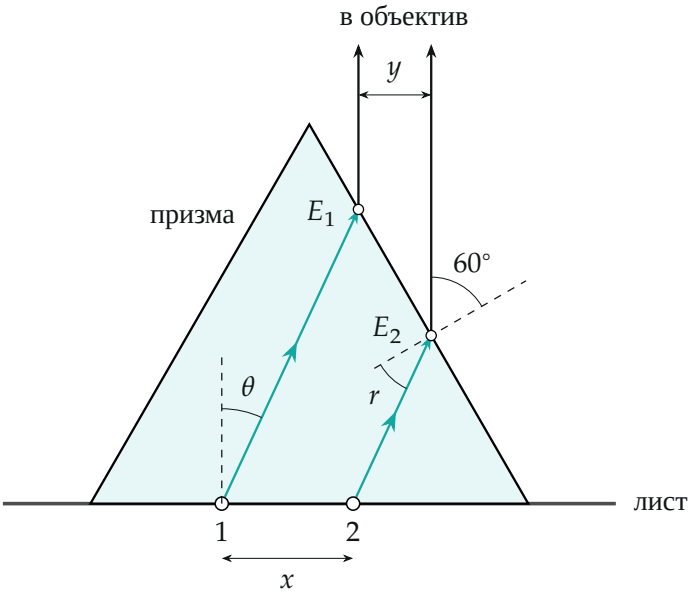
Рис. 6

Увеличенная фотография (рис. 8):



▲ **Решение. Что происходит.** Призма лежит на листе боковой гранью, её сечение — равносторонний треугольник с основанием на листе. Объектив далеко, поэтому в него попадают только вертикальные лучи. Луч от строки текста идёт вверх сквозь стекло наклонно и на наклонной грани преломляется так, что выходит из неё строго вертикально — только такие лучи видит объектив. Из-за преломления на наклонной грани расстояния между строками в призме на снимке меньше, чем вне призмы; вдоль самих строк изображение не искажается. Главная идея: отношение y/x расстояния между строками в призме к расстоянию между теми же строками вне призмы зависит только от показателя преломления n; измерим его на снимке и найдём n.

Обозначения. x — расстояние между соседними строками текста на листе (вне призмы), y — расстояние между их изображениями в призме; оба измеряются в одних единицах на одном снимке. r — угол между лучом внутри стекла и нормалью к наклонной грани, θ — угол этого луча с вертикалью.



Ход лучей от двух строк текста (1 и 2) в сечении призмы при $n = 1{,}51$.

Внутри стекла лучи параллельны и идут под углом θ к вертикали, на грани они выходят в воздух вертикально.

1. Закон преломления на грани. Треугольник равносторонний, поэтому наклонная грань составляет с листом угол $60°$, а её нормаль — угол $60°$ с вертикалью. Вышедший луч вертикален, значит, угол падения в воздухе равен $60°$. Закон преломления на грани стекло — воздух, $n\sin r = \sin 60°$:

$$\sin r = \frac{\sqrt{3}}{2n}, \qquad \theta = 60° - r.$$

Обратите внимание: вертикален только вышедший луч; внутри призмы лучи, которые видит объектив, наклонены на θ. Они все параллельны, потому что определяются одним и тем же углом r.

2. Связь y и x. Две строки на листе (точки 1 и 2 на рисунке) отстоят на x; их лучи внутри призмы параллельны, единичный вектор луча $\vec{d} = (\sin\theta, \cos\theta)$, и они приходят на грань в точках E_1 и E_2 после путей t_1 и t_2. Тогда $\overrightarrow{E_1E_2} = (x,\,0) + (t_2 - t_1)\,\vec{d}$, и в проекциях на горизонталь и вертикаль

$$y = x + (t_2 - t_1)\sin\theta, \qquad -\sqrt{3}\,y = (t_2 - t_1)\cos\theta,$$

где второе равенство выражает наклон грани на $60°$: E_2 ниже E_1 на $y\,\mathrm{tg}\,60°$. Исключим $t_2 - t_1$: $y = x - \sqrt{3}\,y\,\mathrm{tg}\,\theta$, то есть

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta}.$$

Подставим $\theta = 60° - r$: $1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{4}{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,r}$, а $\mathrm{tg}\,r = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n^2 - 3}}$ из пункта 1. Получаем

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{4n^2 - 3}}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad n = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{9}{(4y/x - 1)^2}}.$$

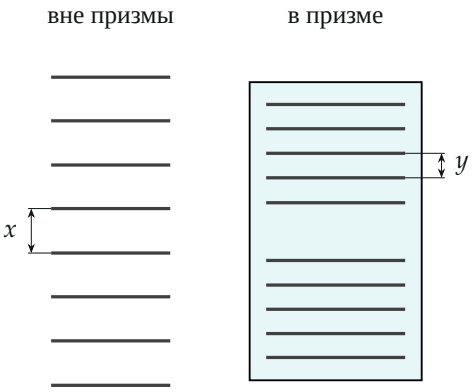
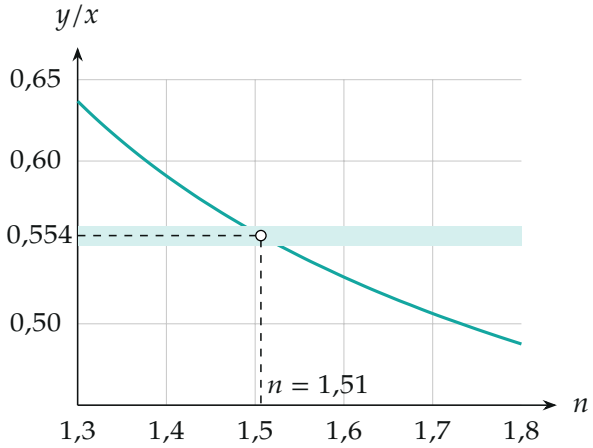


Схема измерения по рис. 8: положения строк вне призмы (слева) и в призме (справа, две половины от двух граней); расстояния в единицах увеличенного снимка.

3. Измерение. Расстояния между соседними строками измеряем по увеличенному снимку (рис. 8) линейкой. В пикселях рисунка, ширина которого 1376 единиц, положения центров строк слева от призмы: 51,2; 128,7; 207,3; 284,7; 363,8; 441,5; 519,9; 598,9 — восемь строк, семь промежутков, $x = 78{,}2$; справа от призмы — 78,4, среднее $x = 78{,}3$. Внутри призмы две группы по пять строк (по одной от каждой грани): 99,6 … 274,3 (шаг 43,6) и 376,9 … 549,4 (шаг 43,1), среднее $y = 43{,}4$. (Тот же результат по линейке на листе 4: $x \approx 9{,}9$ мм, $y \approx 5{,}5$ мм.) Отношение

$$\frac{y}{x} = \frac{43{,}4}{78{,}3} = 0{,}554, \qquad 4\,\frac{y}{x} - 1 = 1{,}216, \qquad n = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{9}{1{,}216^2}} \approx 1{,}51.$$

Погрешность: шаг внутри призмы определён с точностью $\pm 0{,}3$ (разброс между двумя половинами), шаг снаружи — $\pm 0{,}1$; относительная погрешность y/x около 1 %, то есть $\pm 0{,}006$. Так как $dn/d(y/x) \approx -3{,}3$, получаем $\Delta n \approx \pm 0{,}02$.



Отношение y/x как функция n; затенена полоса погрешности измерения, пересечение с кривой даёт $n = 1{,}51 \pm 0{,}02$.

Проверка. При $n = 1$ (призма из воздуха) формула даёт $y/x = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{1}}\right) = 1$: строки не сжаты, как и должно быть. При $n \to \infty$ луч внутри идёт вдоль нормали к грани ($r \to 0$, $\theta = 60°$), $y/x \to \frac{1}{4}$. При $n = 1{,}51$ получаем $r = 35{,}1°$, $\theta = 24{,}9°$, $y/x = 0{,}554$ — это же отношение даёт построение на рисунке, где лучи рассчитаны по закону преломления (численно, python). Значение $n \approx 1{,}5$ типично для стекла и оргстекла, результат согласуется.

Физический смысл: наклонная грань сжимает изображение только в направлении, перпендикулярном ребру призмы, то есть поперёк строк; поэтому по двум шагам строк на одном снимке можно найти n, не измеряя ни одного угла.

Ответ. $n \approx 1{,}51$ (по $y/x = 0{,}554$; $n = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{9}{(4y/x - 1)^2}}$, погрешность около $\pm 0{,}02$).