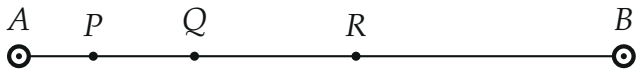
Средняя скорость на половине пути

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 10 класс, площадка 1, задача 1] Между городами A и B есть три деревни P, Q и R, причём для расстояний между населёнными пунктами справедливы такие соотношения: $AP : PQ : QR : RB = 1 : 2 : 3 : 4$. Автомобиль проехал между городами A и B так, что его скорость между каждыми ближайшими населёнными пунктами была постоянной, а времена прохождения отрезков AP, PQ, QR и RB относятся друг к другу как $4 : 3 : 2 : 1$. Найти среднюю скорость автомобиля на первой половине пути, если его скорость на отрезке RB равнялась v.



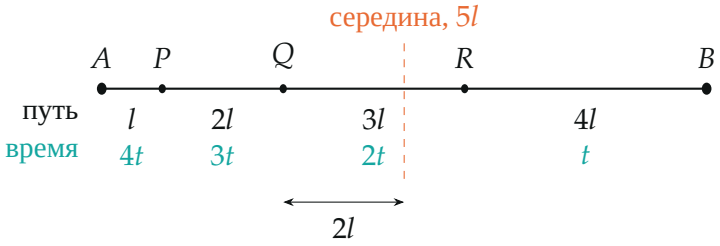
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю скорость: средняя скорость — весь путь, делённый на всё время, а не среднее из скоростей. Автомобиль едет по участкам равномерно, но всё быстрее: короткие первые участки занимают больше всего времени. Середина пути AB попадает внутрь участка QR, поэтому время на этот участок придётся делить. Все длины выразим через одну l, все времена — через одно t, а l/t — через v.

Обозначения. $AP = l$, тогда $PQ = 2l$, $QR = 3l$, $RB = 4l$, весь путь $10l$. Время на RB — t, тогда на QR — $2t$, на PQ — $3t$, на AP — $4t$. t_0 — время первой половины пути, $v_{\text{ср}}$ — искомая средняя скорость.

1. Связь l, t и v. На участке RB автомобиль едет равномерно со скоростью v:

$$v = \frac{4l}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{t} = \frac{v}{4}.$$

Скорости на остальных участках: $v_{AP} = \dfrac{l}{4t} = \dfrac{v}{16}$, $v_{PQ} = \dfrac{2l}{3t} = \dfrac{v}{6}$, $v_{QR} = \dfrac{3l}{2t} = \dfrac{3v}{8}$.

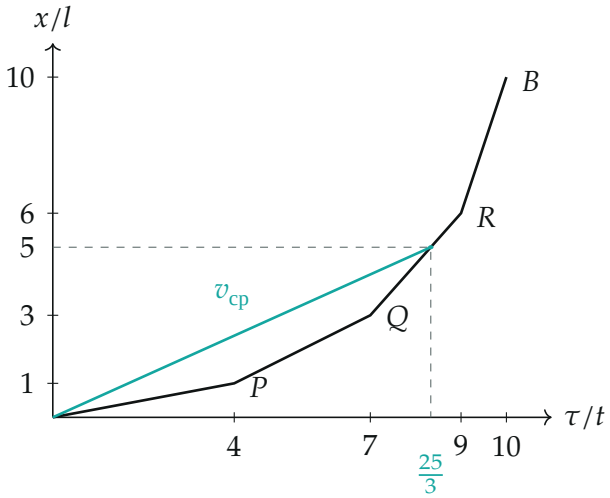


Участки пути (длины и времена); середина пути делит участок QR в отношении $2:1$

2. Где середина пути. Половина пути — $5l$. До Q автомобиль проходит $l+2l=3l$, ещё $2l$ из QR — и он на середине. По участку QR он едет равномерно, поэтому $2l$ из $3l$ занимают $\frac{2}{3}$ времени участка: $\frac{2}{3}\cdot 2t=\frac{4}{3}t$.

3. Время первой половины пути.

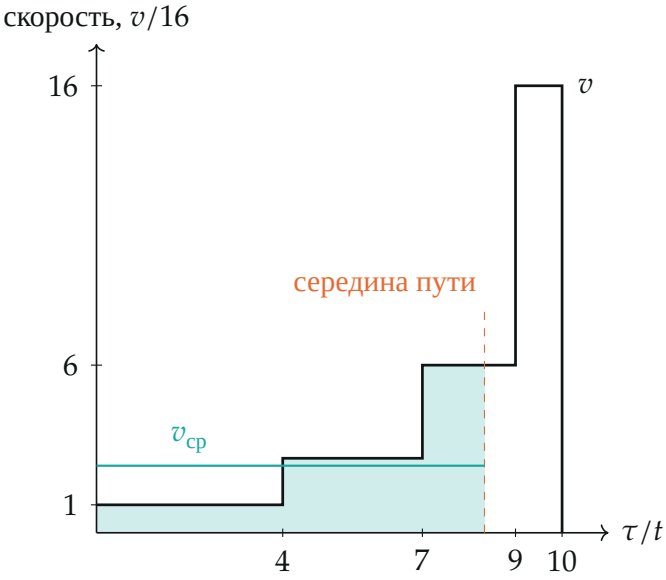
$$t_0 = 4t + 3t + \frac{4}{3}t = \frac{25}{3}\,t.$$



Координата от времени: ломаная из четырёх равномерных участков; средняя скорость на первой половине — наклон бирюзовой хорды

4. Средняя скорость. По определению — путь, делённый на время:

$$v_{\text{ср}} = \frac{5l}{t_0} = \frac{5l}{\frac{25}{3}t} = \frac{3}{5}\cdot\frac{l}{t} = \frac{3}{5}\cdot\frac{v}{4} = \frac{3}{20}v.$$



Скорость от времени (в единицах $v/16$): закрашенная площадь — первая половина пути; высота прямоугольника той же площади — $v_{ср} = 2{,}4 \cdot \frac{v}{16}$

Обратите внимание: середина *пути* и середина *времени* — разные точки. Половина времени поездки ($5t$) кончается ещё на участке PQ, а половина пути — только через $\frac{25}{3}t$ из $10t$.

Проверка. Размерность: $\frac{3}{20}v$ — скорость. Числа: возьмём $l = 1$ км, $t = 1$ ч, $v = 4$ км/ч; первая половина — 5 км за $\frac{25}{3}$ ч, средняя 0,6 км/ч $= \frac{3}{20}\cdot 4$ км/ч. Второй способ: вторая половина пути (l из QR и весь RB, $5l$) пройдена за $10t - \frac{25}{3}t = \frac{5}{3}t$, средняя скорость на ней $3\frac{l}{t} = \frac{3}{4}v$ — в 5 раз больше, чем на первой; а средняя на всём пути $\frac{10l}{10t} = \frac{v}{4}$ лежит между ними, как и положено.

Смысл: медленные участки «весят» больше, потому что на них уходит больше времени; поэтому средняя скорость на первой половине пути в $20/3$ раза меньше конечной.

Ответ. $v_{\text{ср}} = \dfrac{3}{20}\,v$.