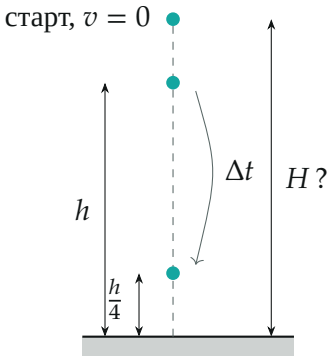
Падение с высоты h и h/4

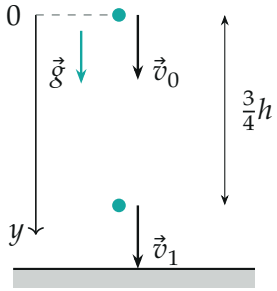
Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 10 класс, площадка 1, задача 2] Тело падает с некоторой высоты без начальной скорости. В некоторый момент времени оно оказалось на высоте h над землёй, а спустя интервал времени Δt на высоте $h/4$. С какой высоты падало тело?



Поясняющий рисунок: три положения тела на одной вертикали

▲ **Решение. Что происходит.** Тело свободно падает с ускорением g. Про движение на участке от высоты h до высоты $h/4$ известно всё, кроме начальной скорости v_0 на этом участке: путь $\frac{3}{4}h$ и время Δt. Значит, из закона равноускоренного движения находим v_0. А по скорости на высоте h закон сохранения энергии (или формула $v^2 = 2gs$) даёт, с какой высоты над этой точкой тело начало падать. Класс задачи — «восстановить начало движения по двум точкам траектории».

Обозначения. Ось y — вниз, начало — на высоте h. v_0 — скорость тела на высоте h; l — высота начальной точки над уровнем h; $H = h + l$ — искомая высота. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.



Участок от высоты h до $h/4$: ось y вниз, скорость и ускорение направлены по ней

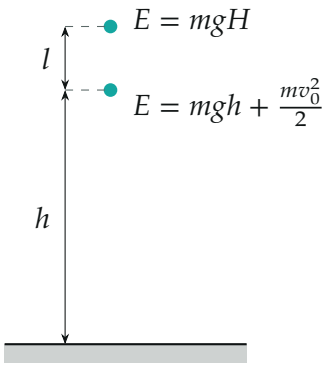
1. Скорость на высоте h. Запишем закон равноускоренного движения для перемещения тела за время Δt в проекции на ось y (вниз, поэтому $v_{0y} = v_0, g_y = g$):

$$\frac{3}{4}h = v_0\,\Delta t + \frac{g\,\Delta t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{3h}{4\,\Delta t} - \frac{g\,\Delta t}{2}.$$

Формула верна, только если $v_0 \geq 0$: тело на высоте h уже падает, а не летит вверх (по условию оно падает без начальной скорости). Это выполняется при $\Delta t \leq \sqrt{3h/(2g)}$.

2. Высота старта над уровнем h. От старта ($v = 0$) до высоты h тело прошло путь l. Закон сохранения механической энергии тела (работает только сила тяжести):

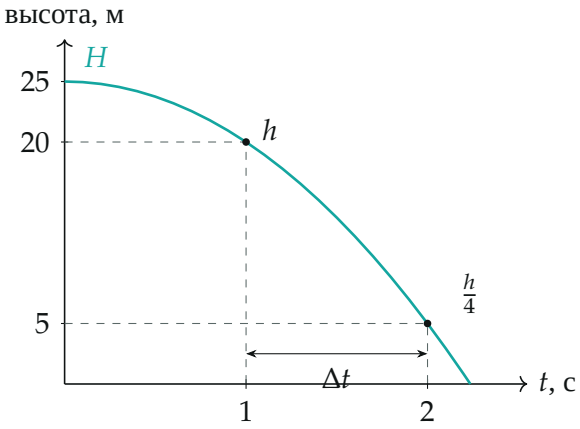
$$mgl = \frac{mv_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{3h}{4\,\Delta t} - \frac{g\,\Delta t}{2}\right)^2.$$



Закон сохранения энергии между стартом и высотой h: потенциальная энергия mgl перешла в кинетическую

3. Искомая высота.

$$H = h + l = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{3h}{4\,\Delta t} - \frac{g\,\Delta t}{2}\right)^2.$$



Пример: $h = 20$ м, $\Delta t = 1$ с, $g = 10$ м/с^2. Высота от времени — парабола с вершиной на высоте $H = 25$ м

Обратите внимание: найденная v_0 — скорость *на высоте h*, а не в момент старта; поэтому H складывается из h и высоты разгона $l = v_0^2/(2g)$.

Проверка. Размерность: $\frac{h}{\Delta t}$ и $g\Delta t$ — скорости, v^2/g — длина. Пример с рисунка: $v_0 = \frac{3\cdot 20}{4\cdot 1} - \frac{10\cdot 1}{2} = 10$ м/с, $l = \frac{100}{20} = 5$ м, $H = 25$ м; тогда $y(t) = 25 - 5t^2$ даёт 20 м при $t = 1$ с и 5 м при $t = 2$ с — ровно h и $h/4$ через $\Delta t = 1$ с. Второй способ: пусть t_1 — время падения до высоты h; $H - h = \frac{gt_1^2}{2}$, $H - \frac{h}{4} = \frac{g(t_1+\Delta t)^2}{2}$; вычитая, $\frac{3}{4}h = gt_1\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$, то есть $gt_1 = v_0$ — та же скорость. Предел: при $v_0 = 0$ ($\Delta t = \sqrt{3h/(2g)}$) тело стартует как раз с высоты h, и формула даёт $H = h$.

Смысл: две точки траектории с известным промежутком времени задают скорость, а скорость при свободном падении однозначно говорит, сколько тело уже пролетело.

Ответ. $H = h + \frac{1}{2g}\left(\frac{3h}{4\,\Delta t} - \frac{g\,\Delta t}{2}\right)^2$ (при $\Delta t \le \sqrt{3h/(2g)}$).