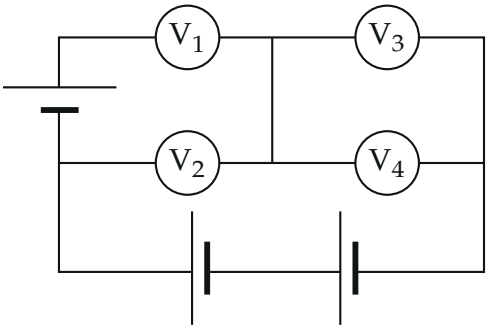
Три источника и четыре вольтметра

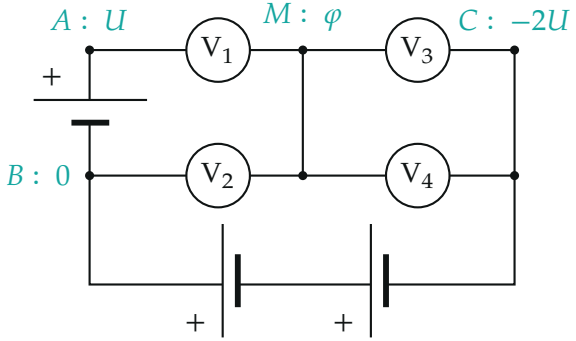
Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 10 класс, площадка 1, задача 3] Имеется три одинаковых идеальных (с нулевым внутренним сопротивлением) источника напряжения U и четыре одинаковых вольтметра. Приборы соединили в цепь проводами, сопротивлением которых можно пренебречь, так, как это показано на рисунке. Найти показания всех вольтметров.



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметры одинаковые, у каждого сопротивление r; ток через вольтметр пропорционален его показанию. Цепь — узлы, соединённые вольтметрами и источниками; идеальный источник жёстко задаёт разность потенциалов своих концов. Неизвестен потенциал одного узла — того, где сходятся все четыре вольтметра. Его даёт закон сохранения заряда для этого узла (первое правило Кирхгофа). Класс задачи — «метод узловых потенциалов».

Обозначения. Узлы: A — верхний левый (между верхним источником и V_1), B — средний левый (между верхним источником, V_2 и нижними источниками), M — средний (средний вертикальный провод, к нему подходят все четыре вольтметра), C — правый (правый провод). Потенциал узла B примем за ноль. $U_1, \dots, U_4$ — показания вольтметров.

1. Потенциалы узлов, заданные источниками. Длинная пластина источника — «+». Верхний источник: $\varphi_A = \varphi_B + U = U$. Два нижних источника включены последовательно и согласованно (у обоих «+» слева), между B и C их напряжения складываются: $\varphi_C = \varphi_B - 2U = -2U$. Неизвестен только $\varphi_M = \varphi$.

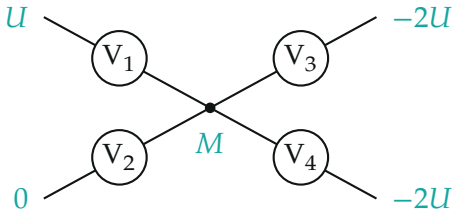


Потенциалы узлов (бирюза); «+» — полюса источников

2. Закон сохранения заряда для узла M**.** Ток через вольтметр между узлами с потенциалами φ и φ_k равен $(\varphi - \varphi_k)/r$. Сумма токов, вытекающих из узла M, равна нулю:

$$\frac{\varphi - U}{r} + \frac{\varphi - 0}{r} + \frac{\varphi - (-2U)}{r} + \frac{\varphi - (-2U)}{r} = 0.$$

Отсюда $4\varphi = U - 4U$, $\varphi = -\frac{3}{4}U$. Знак: узел M ниже по потенциалу, чем B, — через V_1 и V_2 ток идёт в узел M, через V_3 и V_4 — из него к C.

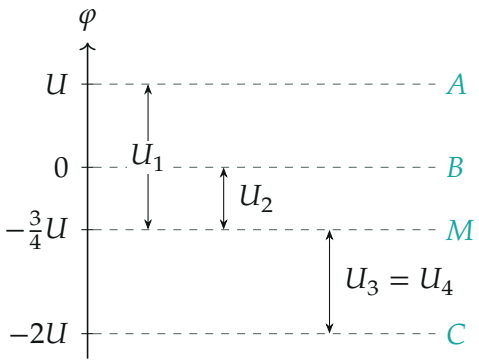


Та же цепь для узла M: четыре одинаковых вольтметра к узлам с известными потенциалами

3. Показания. Вольтметр показывает модуль разности потенциалов своих концов:

$$U_1 = U - \varphi = \frac{7}{4}U, \qquad U_2 = 0 - \varphi = \frac{3}{4}U,$$

$$U_3 = U_4 = \varphi - (-2U) = \frac{5}{4}U.$$



Потенциалы узлов на одной оси: показания вольтметров — расстояния между уровнями

Обратите внимание: «+» у нижних источников с одной стороны (слева), поэтому между B и C ровно $2U$; верхний источник подключён между A и B и с нижними последовательно не соединён — его напряжение складывается с ними только на пути $A \to B \to C$, то есть $\varphi_A - \varphi_C = 3U$.

Проверка. Второй закон Кирхгофа по контурам: $A \to \mathrm{V}_1 \to M \to \mathrm{V}_3 \to C$ — $U_1 + U_3 = \frac{7}{4}U + \frac{5}{4}U = 3U = \varphi_A - \varphi_C$; $B \to \mathrm{V}_2 \to M \to \mathrm{V}_4 \to C$ — $U_2 + U_4 = 2U$. Токи в узле M: втекает $\frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4}$, вытекает $\frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4}$ (в единицах U/r) — сходится. Ответ не зависит от r, как и должно быть для одинаковых вольтметров.

Смысл: идеальные источники фиксируют потенциалы трёх узлов, а единственный «свободный» узел встаёт в среднее, взвешенное по проводимостям, — здесь $\varphi = \frac{1}{4}(U + 0 - 2U - 2U)$.

Ответ. $U_1 = \dfrac{7}{4}U$, $U_2 = \dfrac{3}{4}U$, $U_3 = U_4 = \dfrac{5}{4}U$.