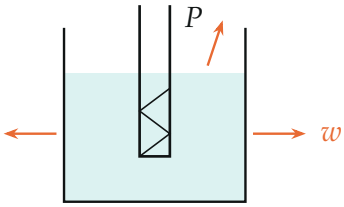
Нагреватели с теплопотерями

Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 10 класс, площадка 1, задача 4] В сосуд с некоторым количеством жидкости опустили работающий нагреватель мощности $P = 1000$ Вт. При этом температура жидкости повысилась на $\Delta T = 1\,^\circ\text{C}$ за время $t_1 = 10$ с. Когда в этот же сосуд опустили работающий нагреватель мощности $P/2$, то температура жидкости повысилась на ΔT за время $t_2 = 24$ с. За какое время температура жидкости в сосуде повысится на ту же величину ΔT, если в сосуд опустить работающий нагреватель мощности $2P$?



Поясняющий рисунок: нагреватель в жидкости; часть теплоты уходит в окружающую среду (мощность потерь w)

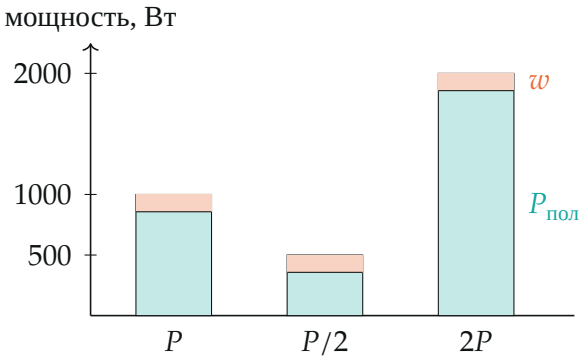
▲ **Решение. Что происходит.** Если бы вся теплота нагревателя шла в жидкость, время нагрева на одно и то же ΔT было бы обратно пропорционально мощности: при $P/2$ — ровно 20 с. Оно больше, 24 с, — значит, есть теплопотери: жидкость отдаёт тепло стенкам и воздуху. Нагрев на $\Delta T = 1\,^\circ\text{C}$ мал, поэтому температура жидкости во всех опытах почти одна и та же, и мощность потерь w можно считать одинаковой и постоянной. Уравнение теплового баланса для каждого опыта: полезная мощность (мощность нагревателя $-\,w$), умноженная на время, равна $cm\Delta T$. Два опыта дают два уравнения на две неизвестные — $cm\Delta T$ и w; третье уравнение даёт t_3.

Обозначения. c, m — удельная теплоёмкость и масса жидкости (вместе с сосудом); $Q = cm\Delta T$ — теплота на нагрев на ΔT; w — мощность теплопотерь; t_3 — искомое время.

1. Тепловой баланс в первых двух опытах. За время нагрева нагреватель выделяет Pt, в окружающую среду уходит wt, остальное нагре-

вает жидкость:

$$Q = (P - w)\,t_1, \qquad Q = \Big(\frac{P}{2} - w\Big)t_2.$$



Мощность нагревателя в трёх опытах: бирюза — полезная часть, идущая на нагрев жидкости, морковная — потери $w \approx 143$ Вт, одинаковые во всех опытах

2. Мощность потерь. Приравняем правые части и выразим w:

$$Pt_1 - wt_1 = \frac{P}{2}t_2 - wt_2 \quad \Rightarrow \quad w(t_2 - t_1) = P\Big(\frac{t_2}{2} - t_1\Big),$$

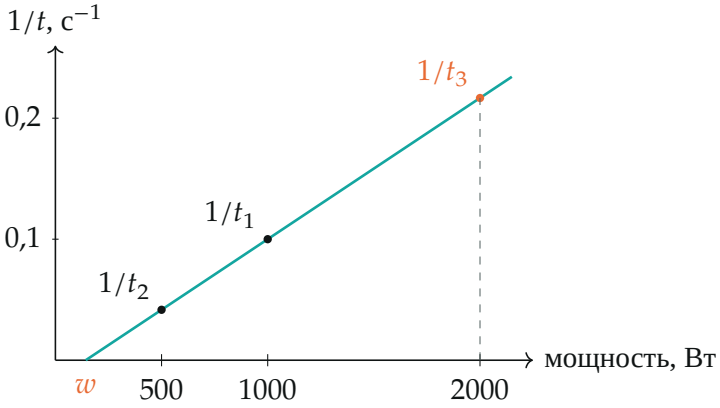
$$w = \frac{P(t_2 - 2t_1)}{2(t_2 - t_1)} = \frac{1000 \cdot (24 - 20)}{2 \cdot 14}\ \text{Вт} = \frac{1000}{7}\ \text{Вт} \approx 143\ \text{Вт}.$$

$w > 0$, потери действительно есть (их нет, только если $t_2 = 2t_1$). На нагрев идёт $Q = (P - w)t_1 = \frac{6000}{7} \cdot 10 \approx 8{,}6$ кДж.

3. Третий опыт. Тот же баланс для нагревателя $2P$:

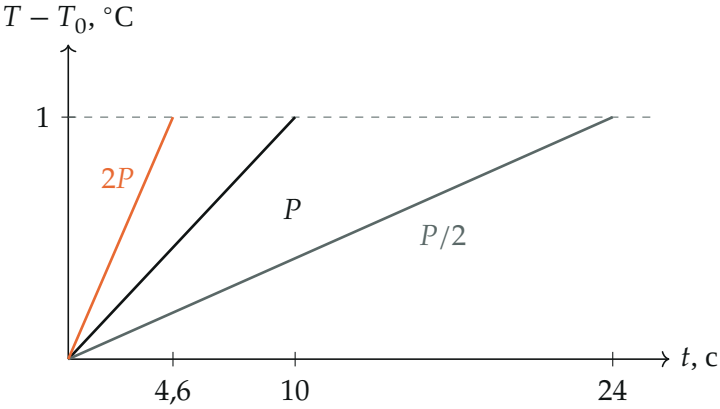
$$Q = (2P - w)\,t_3 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{(P - w)\,t_1}{2P - w},$$

$$t_3 = \frac{1000 - \frac{1000}{7}}{2000 - \frac{1000}{7}} \cdot 10\ \text{с} = \frac{60}{13}\ \text{с} \approx 4{,}6\ \text{с}.$$



$1/t = (P_{нагр} - w)/Q$ — прямая от мощности нагревателя; она проходит через две точки опытов и пересекает ось мощностей в w

Обратите внимание: с потерями увеличение мощности вдвое сокращает время *больше* чем вдвое (10 с → 4,6 с), а уменьшение вдвое удлиняет его больше чем вдвое (10 с → 24 с): потери съедают тем большую долю мощности, чем слабее нагреватель.



Нагрев жидкости во времени в трёх опытах (потери постоянны — температура растёт линейно)

Проверка. Размерность: w — Вт, t_3 — с. Без потерь ($w = 0$) формула даёт $t_3 = t_1/2 = 5$ с, с потерями 4,6 с < 5 с, как и обсуждено выше. Подстановка: $(500 - 143) \cdot 24 \approx 8{,}57$ кДж, $(2000 - 143) \cdot 4{,}615 \approx 8{,}57$

кДж — то же Q, что в первом опыте. Второй способ — графический: точки $(P,\ 1/t)$ лежат на одной прямой (рисунок), её продолжение до $2P$ даёт $\frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_1} + 2\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = 0{,}2167$ с$^{-1}$ (шаг по мощности от P до $2P$ вдвое больше, чем от $P/2$ до P), $t_3 \approx 4{,}6$ с.

Смысл: потери постоянной мощности — «налог», одинаковый для любого нагревателя; чем мощнее нагреватель, тем меньшую долю он составляет.

Ответ. $t_3 = \dfrac{P - w}{2P - w}\,t_1 \approx 4{,}6$ с, где $w = \dfrac{P(t_2 - 2t_1)}{2(t_2 - t_1)} \approx 143$ Вт — мощность теплопотерь.