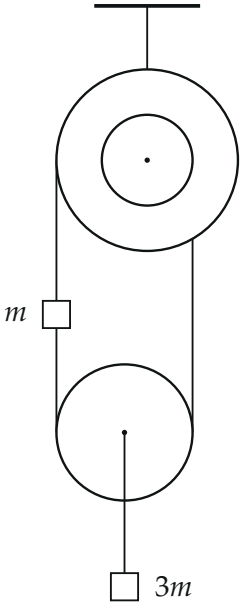
Блок из двух дисков и два груза

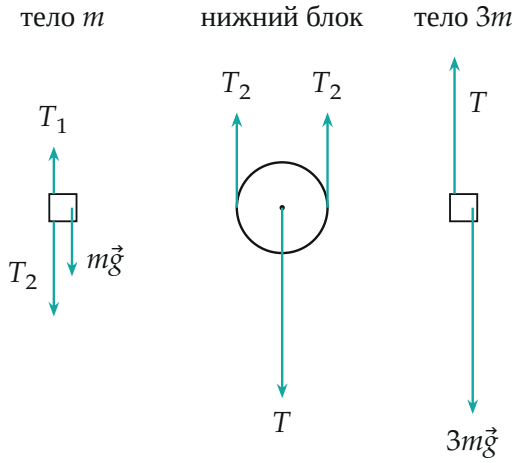
Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 10 класс, площадка 1, задача 5] Блок склеен из двух дисков с радиусами R и $2R$, насаженных на одну и ту же горизонтальную ось, и подвешен к горизонтальному потолку. На блоки намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой прикреплён груз массой m, как это показано на рисунке. Нить охватывает также нижний блок, размеры которого подобраны так, что все отрезки нити вертикальны. Второй груз массой $3m$ прикреплён к оси нижнего блока. Найти ускорение тел. Блоки невесомы.



▲ **Решение. Что происходит.** Груз m закреплён на левой ветви нити, которая сходит с *большого* диска; правая ветвь идёт на *малый* диск; груз $3m$ висит на оси нижнего блока. Верхний блок поворачивается как целое: если с большого диска нить сматывается, то на малый она наматывается, но вдвое меньше. Поэтому нить внизу удлиняется, и груз $3m$ тоже опускается — оба груза идут вниз, но с разными ускорениями. Класс

задачи — блоки: неизвестны два ускорения и натяжения, нужны три связи — равновесие невесомых блоков (по силам и по моментам) и нерастяжимость нити.

Обозначения. Ось x направим вертикально вниз. a_1, a_2 — проекции ускорений грузов m и $3m$ на ось x. T_1 — натяжение нити над грузом m (между большим диском и грузом); T_2 — натяжение нити ниже груза m (до нижнего блока), оно же на правой ветви (между нижним блоком и малым диском): нижний блок невесом, поэтому по обе стороны от него натяжение одинаково; T — сила, с которой груз $3m$ тянет ось нижнего блока (и ось — груз).



Силы на тела: груз m, нижний блок (невесомый), груз $3m$

1. Нижний блок. Блок невесом, значит, сумма сил на него равна нулю (иначе при нулевой массе ускорение было бы бесконечным). Две ветви нити тянут его вверх с силой T_2 каждая, груз $3m$ тянет вниз силой T (в проекциях на ось x):

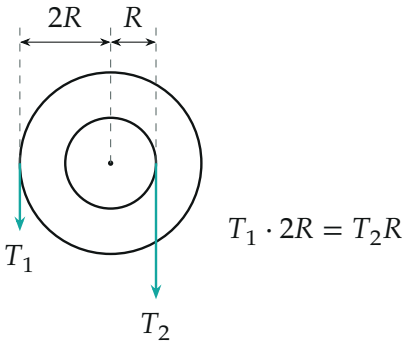
$$-2T_2 + T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 2T_2.$$

2. Верхний блок. Он тоже невесом, значит, сумма моментов сил относительно его оси равна нулю. Нить действует на большой диск силой T_1 с плечом $2R$ (вниз слева от оси), а на малый — силой T_2 с плечом R

(вниз справа от оси); эти моменты вращают блок в разные стороны:

$$T_1 \cdot 2R = T_2 R \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1.$$

Реакция подвеса проходит через ось и момента не создаёт.



Верхний блок: моменты сил нити относительно оси

3. Второй закон Ньютона для грузов в проекциях на ось x (вниз). На груз m действуют: mg вниз, T_1 вверх, T_2 вниз:

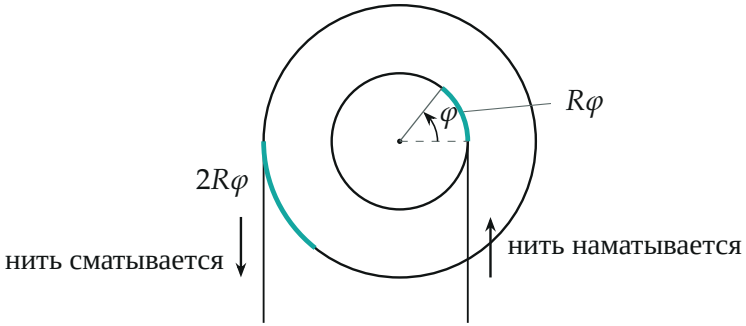
$$m a_1 = mg + T_2 - T_1 = mg + T_1.$$

На груз $3m$: $3mg$ вниз и $T = 2T_2 = 4T_1$ вверх:

$$3m a_2 = 3mg - 4T_1.$$

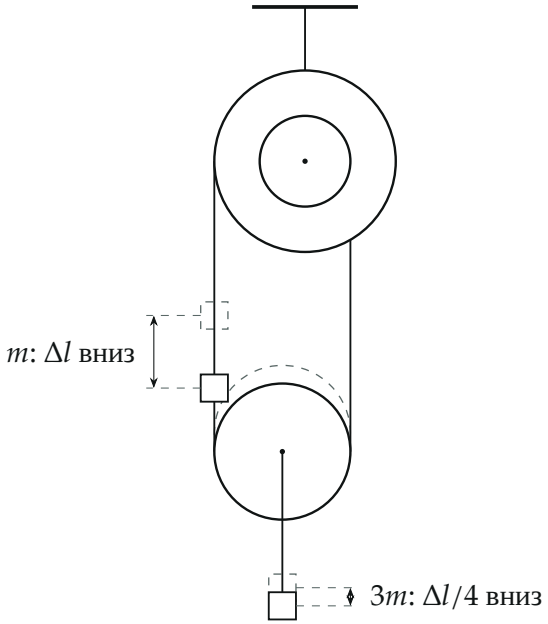
Неизвестных три (a_1, a_2, T_1), уравнений два; нужна кинематическая связь.

4. Кинематическая связь (нерастяжимость нити). Пусть блок повернулся на малый угол φ так, что левая ветвь пошла вниз (если в действительности наоборот, угол окажется отрицательным). С большого диска сматывается нить длиной $2R\varphi$, а правая сторона малого диска при этом идёт вверх и наматывает $R\varphi$. Груз m сидит на нити левой ветви, поэтому он опускается на $\Delta l = 2R\varphi$.



Поворот верхнего блока на φ: с большого диска сматывается дуга $2R\varphi$, на малый наматывается дуга $R\varphi$

Теперь по длине нити между дисками. Свободная часть — две вертикальные ветви длиной Y каждая (от оси верхнего блока до оси нижнего) плюс дуга вокруг нижнего блока, которая не меняется. Она удлинилась на разность смотанного и намотанного: $2R\varphi - R\varphi = R\varphi$, то есть $2\,\Delta Y = R\varphi$: нижний блок, а с ним груз $3m$, опускается на $\Delta Y = \dfrac{R\varphi}{2} = \dfrac{\Delta l}{4}$.



Груз m опускается на $\Delta l = 2R\varphi$, нижний блок и груз $3m$ — на $\Delta l/4$ (пунктир — начальное положение)

Связь перемещений верна в любой момент, поэтому такая же связь у скоростей и ускорений:

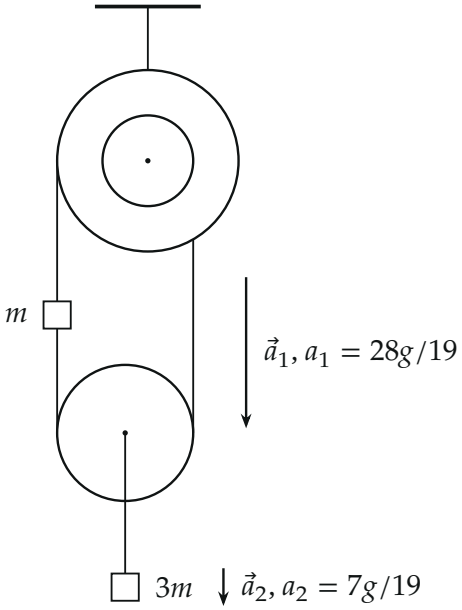
$$a_1 = 4a_2.$$

5. Решение. Из первого уравнения пункта 3 выразим $T_1 = m(a_1 - g) = m(4a_2 - g)$ и подставим во второе:

$$3m\,a_2 = 3mg - 4m(4a_2 - g) \quad \Rightarrow \quad 19\,a_2 = 7g,$$

$$a_2 = \frac{7}{19}\,g, \qquad a_1 = 4a_2 = \frac{28}{19}\,g.$$

Оба положительны — оба груза движутся вниз. Натяжения: $T_1 = m\left(\frac{28}{19}g - g\right) = \frac{9}{19}\,mg > 0$, $T_2 = \frac{18}{19}\,mg$, $T = \frac{36}{19}\,mg$ — нить натянута, решение допустимо.



Результат: груз m опускается с ускорением $28g/19$, груз $3m$ — с ускорением $7g/19$

Обратите внимание. Ускорение груза m больше g: его тянет вниз не только тяжесть, но и нить снизу, $T_2 = 2T_1 > T_1$. Натяжения по разные стороны *верхнего* блока различны: он составной, и равенство натяжений там не выполняется. Равны они только у нижнего простого блока.

Проверка. Размерность: g — ускорение. Второй способ — энергия. Блоки невесомы, трения нет, поэтому мощность силы тяжести равна скорости роста кинетической энергии грузов. При скорости v груза m скорость груза $3m$ равна $v/4$, ускорения — a_1 и $a_1/4$:

$$m\,v\,a_1 + 3m\,\frac{v}{4}\cdot\frac{a_1}{4} = mg\,v + 3mg\,\frac{v}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{19}{16}\,a_1 = \frac{7}{4}\,g \quad\Rightarrow\quad a_1 = \frac{28}{19}\,g.$$

Совпало. Смысл: с большого диска нить уходит вдвое быстрее, чем наматывается на малый, поэтому и лёгкий, и тяжёлый груз опускаются, причём лёгкий — вчетверо быстрее.

Ответ. Оба груза движутся вниз: груз m с ускорением $a_1 = \dfrac{28}{19}\,g$, груз $3m$ с ускорением $a_2 = \dfrac{7}{19}\,g$.