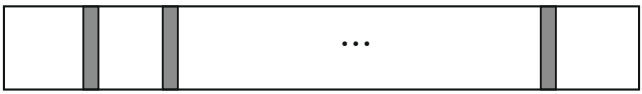
Поршни в цилиндре

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 10 класс, комплект 2, задача 3] В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной l находятся n подвижных теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на $n+1$ отсек. Первоначально температура газа во всех отсеках была равна T_0, объёмы всех отсеков одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T_1, а температуру газа в других отсеках поддерживают равной T_0. На сколько сместится при этом самый правый поршень?

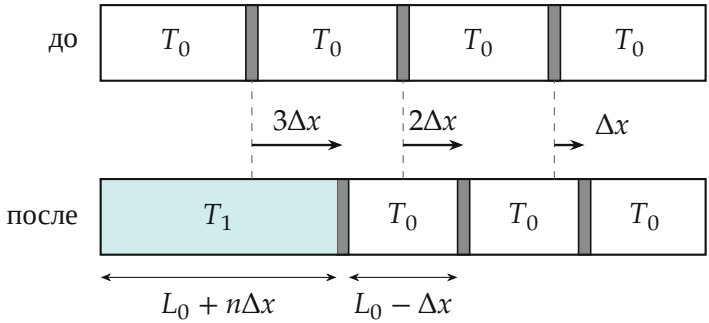


▲ **Решение. Что происходит.** Поршни подвижны, поэтому каждый стоит там, где давления слева и справа от него равны: в равновесии давление во всех отсеках одно и то же. Газ в левом отсеке нагрели — его давление выросло, он толкает поршни вправо и сжимает остальные отсеки, пока давления снова не сравняются. Ключевые законы — условие равновесия поршня и уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого отсека. Главная идея: отсеки $2, \dots, n+1$ имеют одинаковые давление, температуру и количество газа, значит, и одинаковые объёмы. Класс задачи — равновесие газов, разделённых подвижными поршнями.

Обозначения. S — площадь сечения сосуда; $L_0 = \dfrac{l}{n+1}$ — начальная длина каждого отсека; ν — количество газа в каждом отсеке; p — общее давление после нагрева; Δx — смещение самого правого поршня (вправо — положительно). Отсеки нумеруем слева направо, поршни — справа налево: правый — первый.

1. До нагрева: газа в отсеках поровну. Условие равновесия невесомого (трения нет) поршня по горизонтали — силы давления слева и справа равны, $p_{\text{лев}}S = p_{\text{прав}}S$; значит, давление p_0 во всех отсеках одно. Уравнение Менделеева — Клапейрона для любого отсека $p_0SL_0 = \nu RT_0$ с одинаковыми p_0, L_0, T_0 даёт одинаковое ν. Поршни теплонепроницаемы и газ не протекает, поэтому ν в каждом отсеке сохраняется.

2. После нагрева: все правые отсеки одинаковы. Снова давление всюду одно, p. Для отсеков $2, \ldots, n+1$ уравнение Менделеева — Клапейрона $pSL = \nu RT_0$ с одними и теми же p, ν, T_0 даёт одну и ту же длину L. Каждый из этих n отсеков сжался на одно и то же Δx: правый отсек (между первым поршнем и стенкой) сжат ровно на смещение правого поршня, $L = L_0 - \Delta x$. Отсюда смещения поршней складываются как в лесенке: первый (правый) сместился на Δx, второй — на $2\Delta x$ (его отсек справа сжат на Δx, и он ещё «едет» вместе с первым), …, n-й (левый) — на $n\Delta x$. Левый отсек удлинился на $n\Delta x$.



Пример $n = 3$, $T_1 = 2T_0$ в масштабе: поршни сместились на Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, правые отсеки одинаковы

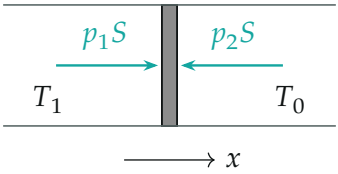
3. Равновесие левого поршня. Неизвестным осталось только Δx. Запишем условие равновесия самого левого поршня: давление газа в левом отсеке равно давлению во втором. Каждое давление выразим из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\frac{\nu RT_1}{S\,(L_0 + n\Delta x)} = \frac{\nu RT_0}{S\,(L_0 - \Delta x)}.$$

Сокращаем $\nu R/S$ и перемножаем крест-накрест:

$$T_1(L_0 - \Delta x) = T_0(L_0 + n\Delta x) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{L_0\,(T_1 - T_0)}{nT_0 + T_1} = \frac{l\,(T_1 - T_0)}{(n+1)(nT_0 + T_1)}.$$

Знак словами: при $T_1 > T_0$ правый поршень смещается вправо, к стенке.



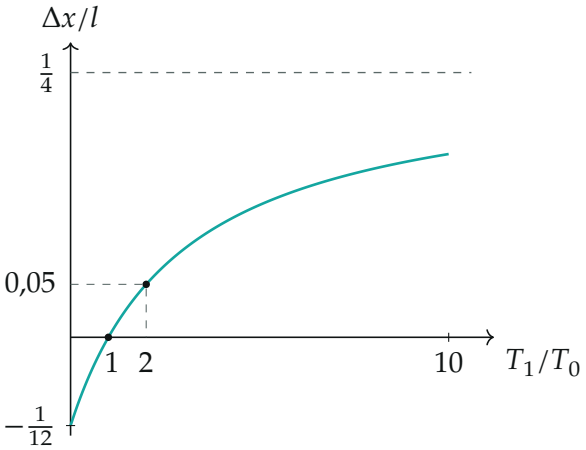
Левый поршень: силы давления газа слева и справа уравновешены, $p_1 = p_2$

4. Второй способ — через общее давление. Сложим длины всех отсеков: $L_л + nL = l$, где $L_л = \dfrac{\nu R T_1}{pS}$, $L = \dfrac{\nu R T_0}{pS}$. Тогда $\dfrac{\nu R}{pS}(T_1 + nT_0) = l$ и

$$L = \frac{lT_0}{T_1 + nT_0}, \qquad \Delta x = L_0 - L = \frac{l}{n+1} - \frac{lT_0}{T_1 + nT_0} = \frac{l\,(T_1 - T_0)}{(n+1)(nT_0 + T_1)}.$$

Тот же результат: длина сосуда делится между отсеками пропорционально температурам.

Обратите внимание: правый поршень смещается меньше всех, а левый — в n раз больше. Ошибка — считать, что все поршни сдвигаются одинаково: тогда правый отсек сжался бы, а средние нет, и давления в них разошлись бы.



Смещение правого поршня при $n = 3$: растёт с T_1 и стремится к $L_0 = l/4$; при $T_1 < T_0$ поршень едет влево

Проверка. Размерность: l умножено на отношение температур — длина. При $T_1 = T_0$ получаем $\Delta x = 0$: ничего не нагрели — ничего не сдвинулось. При $T_1 \to \infty$ $\Delta x \to l/(n+1) = L_0$: горячий газ сжимает остальные отсеки в ноль. При $n = 1$ (один поршень) $\Delta x = l(T_1 - T_0)/(2(T_0 + T_1))$ — известный ответ для двух отсеков. Численно для рисунка: $n = 3$, $T_1 = 2T_0$, $l = 8$ даёт $\Delta x = 0{,}4$, левый отсек 3,2, остальные по 1,6, и давления $2/3{,}2 = 1/1{,}6$ равны. Смысл: длина сосуда делится между отсеками пропорционально их температурам.

Ответ. Правый поршень сместится вправо на $\Delta x = \dfrac{l\,(T_1 - T_0)}{(n+1)(nT_0 + T_1)}$.