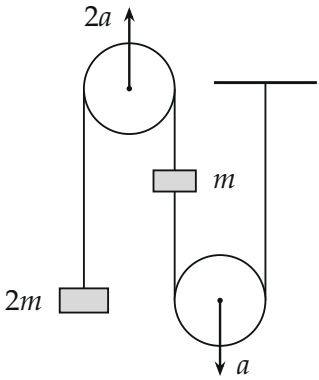
# Блоки с известными ускорениями

**Задача 3.** [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, комплект 1, задача 3] В системе двух тел с массами $m$ и $2m$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплён к потолку, и двух невесомых блоков (см. рисунок) ускорения блоков известны и равны $a$ и $2a$ (см. рисунок). Какими силами нужно действовать на блоки?




▲ **Решение. Что происходит.** Блоки невесомы, поэтому сила, действующая на блок, определяется только натяжениями нитей: результирующая сила на невесомое тело равна нулю при любом ускорении (иначе $m\vec{a} = \vec{F}$ дало бы бесконечное ускорение). Значит, нужно найти натяжения нитей. Их даёт второй закон Ньютона для грузов, но сначала нужны ускорения грузов: они связаны с заданными ускорениями блоков условием нерастяжимости нитей. Цепочка: кинематическая связь → ускорения грузов → натяжения → силы на блоки.

**Обозначения.** Нить одна, но груз $m$ привязан к ней посередине, поэтому натяжения по обе стороны от него разные: $T_1$ — натяжение участка от груза $2m$ через верхний блок к грузу $m$; $T_2$ — участка от груза $m$ вниз вокруг нижнего блока и вверх к потолку. $F_1$, $F_2$ — искомые силы, действующие на верхний и нижний блоки. Ось $y$ направим вверх.

**1. Связь перемещений.** Нить нерастяжима, длина каждого её участка постоянна (дуги на блоках не меняются). Пусть нижний блок опустился

на $\Delta l$. Измеряя глубину от потолка ($h_B$ — нижний блок, $h_m$ — груз $m$, $h_U$ — верхний блок, $h_{2m}$ — груз $2m$), запишем длину участка нити с $T_2$: потолок — нижний блок (путь вниз $h_B$) и нижний блок — груз $m$ (путь вверх $h_B - h_m$). Длина постоянна:

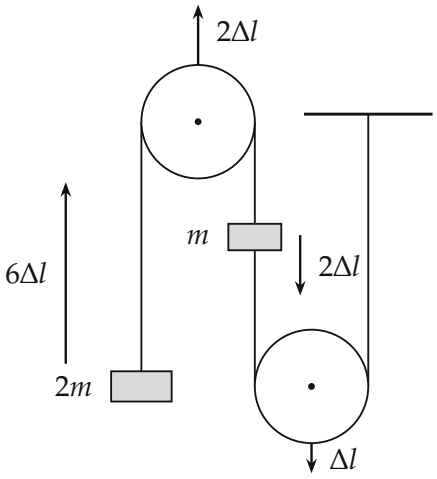
$$h_B + (h_B - h_m) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \Delta h_m = 2\Delta h_B = 2\Delta l.$$

Груз $m$ опускается на $2\Delta l$. Верхний блок по условию имеет вдвое большее ускорение, чем нижний, и движется вверх, значит, поднимается на $2\Delta l$, $\Delta h_U = -2\Delta l$. Для участка с $T_1$:

$$(h_{2m} - h_U) + (h_m - h_U) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \Delta h_{2m} = 2\Delta h_U - \Delta h_m,$$

$$\Delta h_{2m} = -4\Delta l - 2\Delta l = -6\Delta l.$$

Груз $2m$ поднимается на $6\Delta l$. Те же отношения верны для скоростей и ускорений: груз $m$ движется вниз с ускорением $2a$, груз $2m$ — вверх с ускорением $6a$.

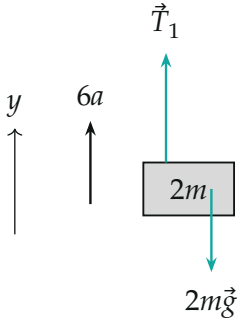



*Перемещения за одно и то же время, если нижний блок опустился на $\Delta l$*

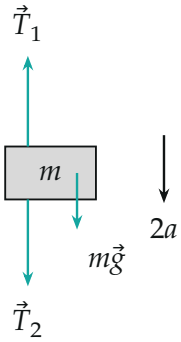
**2. Силы на грузы.** Запишем второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на ось $y$ (вверх). На груз $2m$ действуют натяжение $T_1$ вверх и сила тяжести $2mg$ вниз; он ускоряется вверх, $a_y = +6a$. На груз $m$

— $T_1$ вверх, $T_2$ вниз (нить, идущая вниз к нижнему блоку) и $mg$ вниз; $a_y = -2a$:

$$2m \cdot 6a = T_1 - 2mg,$$
$$m \cdot (-2a) = T_1 - T_2 - mg.$$




груз $2m$




груз $m$

*Силы на грузы; длины стрелок условны*

**3. Натяжения.** Из первого уравнения $T_1 = 12ma + 2mg$. Подставим во второе: $T_2 = T_1 - mg + 2ma$, откуда

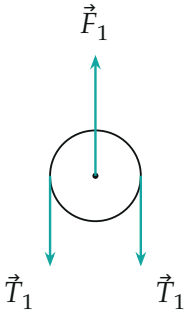
$$T_1 = 12ma + 2mg, \qquad T_2 = 14ma + mg.$$

**4. Силы на блоки.** Блок невесом, поэтому по второму закону Ньютона сумма сил на него равна нулю. Верхний блок: нить огибает его и тянет вниз двумя ветвями по $T_1$ (с обеих сторон нить натянута одинаково, потому что блок невесом и трение отсутствует), а искомая сила $F_1$ направлена вверх:

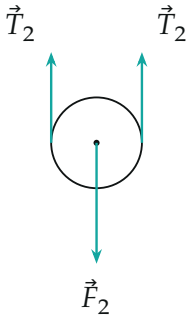
$$F_1 - 2T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 2T_1 = 24ma + 4mg.$$

Нижний блок: нить тянет его вверх двумя ветвями по $T_2$ (одна ветвь идёт к грузу $m$, другая — к потолку), искомая сила $F_2$ направлена вниз:

$$2T_2 - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 2T_2 = 28ma + 2mg.$$

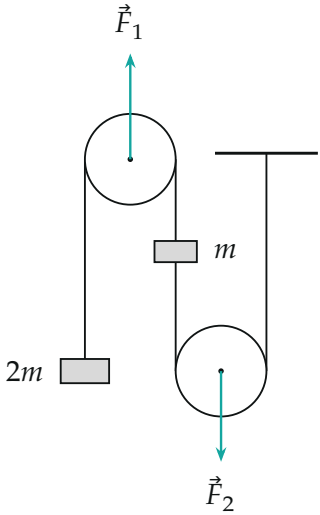



верхний блок




нижний блок

*Силы на невесомые блоки: сумма сил равна нулю*




*Искомые силы: $\vec{F}_1$ — вверх на верхний блок, $\vec{F}_2$ — вниз на нижний блок*

Обратите внимание: натяжения $T_1$ и $T_2$ разные — груз $m$ привязан к нити посередине и сам действует на неё. Взять «одну силу натяжения на всю нить» нельзя. И второе: блок ускоряется, но невесом, поэтому сила на него равна именно $2T$, без слагаемых вида «масса блока на ускорение».

**Проверка.** Второй способ — второй закон Ньютона для всей системы (грузы, блоки, нить) в проекции на ось $y$. Внешние силы: сила натяжения $T_2$ в месте крепления к потолку (вверх), $F_1$ (вверх), $F_2$ (вниз), силы тяжести $3mg$ (вниз). Сумма $m_i a_{iy} = 2m \cdot 6a - m \cdot 2a = 10ma$ (невесомые блоки импульса не несут):

$$T_2 + F_1 - F_2 - 3mg = (14ma + mg) + (24ma + 4mg) - (28ma + 2mg) - 3mg = 10ma,$$

выполняется. Предел $a \to 0$ (покой): $T_1 = 2mg$, $T_2 = mg$, $F_1 = 4mg$, $F_2 = 2mg$, и условие равновесия груза $m$ $T_1 = T_2 + mg$ верно. Размерность: $ma$ и $mg$ — силы.

**Ответ.** $F_1 = 2T_1 = 24ma + 4mg$ — сила, действующая вверх на верхний блок (с ускорением $2a$); $F_2 = 2T_2 = 28ma + 2mg$ — сила, действующая вниз на нижний блок (с ускорением $a$).