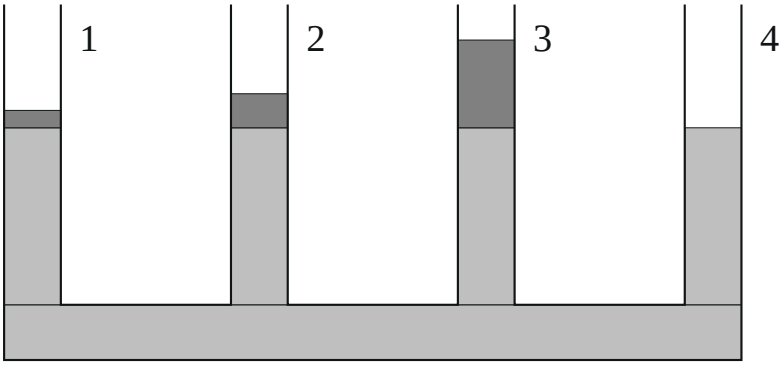
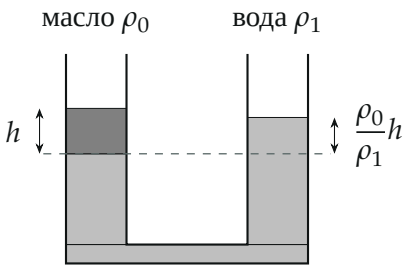
Четыре сосуда с маслом

Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, комплект 1, задача 4] Имеется четыре одинаковых цилиндрических сосуда, в которые налито некоторое количество воды. Поверх воды в первый, второй и третий сосуды (сосуды перенумерованы на рисунке) аккуратно наливают слой масла толщиной соответственно h, $2h$ и $3h$. Насколько изменится уровень жидкости в каждом сосуде по сравнению с первоначальным положением после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода ни из одного сосуда полностью маслом не вытесняется. Плотность масла ρ_0, воды ρ_1 ($\rho_1 > \rho_0$).



▲ **Решение. Что происходит.** Сосуды соединены снизу, и вода течёт из одного в другой, пока давление у дна не станет одинаковым под всеми четырьмя. Масло давит на воду своим весом, поэтому под сосудами с маслом давление растёт и вода вытесняется в сосуд 4, где масла нет; чем толще слой масла, тем больше воды уходит из сосуда. Два закона решают задачу: равенство давлений у дна (условие равновесия соединённых сосудов) и сохранение объёма воды (вода несжимаема, её никто не добавлял и не убирал). Главная идея: слой масла толщиной h создаёт у дна давление $\rho_0 g h$, как слой воды толщиной $\rho_0 h/\rho_1$. Класс задачи — сообщающиеся сосуды с двумя жидкостями.



Слой масла h уравновешивается слоем воды $\frac{\rho_0}{\rho_1}h$: давление на уровне границы масла и воды слева равно давлению воды справа на том же уровне

Обозначения. S — площадь сечения каждого сосуда; H — начальная высота воды (во всех сосудах одна и та же), все высоты отсчитываем от общего уровня дна сосудов; x_i — конечная высота воды в i-м сосуде; $k_i h$ — толщина масла в нём ($k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 0$); Δh_i — изменение уровня верхней поверхности жидкости (масла в сосудах 1–3, воды в сосуде 4).

1. Равенство давлений у дна. В покоящейся жидкости давление на одном уровне одинаково, иначе вода потекла бы. Поэтому давление на уровне дна сосудов одно и то же под всеми сосудами. Под i-м сосудом оно складывается из атмосферного, давления масла и давления воды:

$$p_\text{a} + \rho_0 g\, k_i h + \rho_1 g\, x_i = \text{одно и то же для всех } i.$$

Сравним с четвёртым сосудом ($k_4 = 0$) и разделим на $\rho_1 g$:

$$x_i = x_4 - k_i \frac{\rho_0}{\rho_1} h. \qquad (1)$$

Из условия вода нигде не вытеснена полностью, значит, все $x_i > 0$ и формула (1) применима.

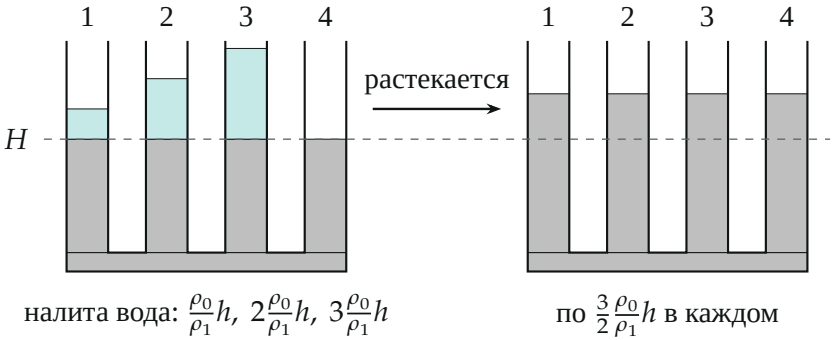
2. Сохранение объёма воды. Начальный объём воды $4SH$ (канал внизу общий и объём воды в нём не меняется). Конечный $S(x_1+x_2+x_3+x_4)$. Подставим (1):

$$4x_4 - (k_1 + k_2 + k_3)\frac{\rho_0}{\rho_1}h = 4H \quad \Rightarrow \quad 4x_4 - \frac{6\rho_0}{\rho_1}h = 4H.$$

В четвёртом сосуде масла нет, поэтому уровень там — это уровень воды, и

$$\Delta h_4 = x_4 - H = \frac{3\rho_0}{2\rho_1} h.$$

Тот же результат даёт замена масла водой: масло толщиной $h, 2h, 3h$ по давлению у дна равно воде толщиной $\frac{\rho_0}{\rho_1}h$, $2\frac{\rho_0}{\rho_1}h$, $3\frac{\rho_0}{\rho_1}h$, всего $\frac{6\rho_0}{\rho_1}h$; эта вода растекается поровну по четырём одинаковым сосудам, на каждый приходится $\frac{3\rho_0}{2\rho_1}h$.



Второй способ для Δh_4: вода, эквивалентная маслу, растекается поровну по четырём сосудам

3. Уровни в остальных сосудах. Верхняя поверхность в i-м сосуде — поверхность масла, она выше уровня воды на $k_i h$. Изменение уровня равно изменению высоты воды $x_i - H$ плюс толщине налитого масла. Из (1) $x_i - H = \Delta h_4 - k_i \frac{\rho_0}{\rho_1} h$, поэтому

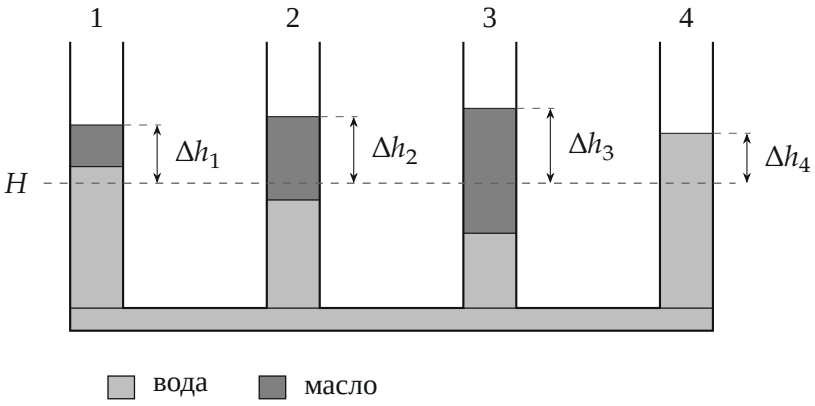
$$\Delta h_i = \Delta h_4 - k_i \frac{\rho_0}{\rho_1} h + k_i h = \frac{3\rho_0}{2\rho_1} h + k_i h \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right).$$

Подставим $k_i = 1, 2, 3$ и приведём:

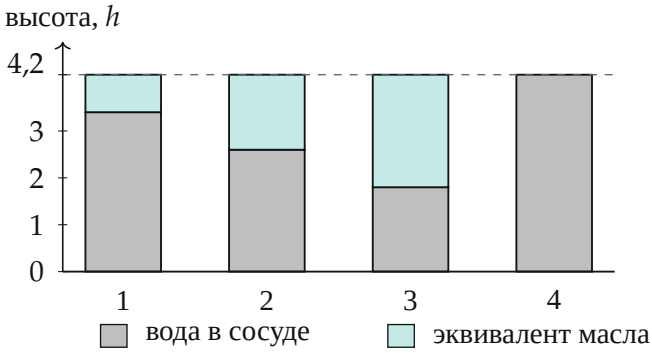
$$\Delta h_1 = h\left(1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right), \quad \Delta h_2 = 2h\left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1}\right), \quad \Delta h_3 = 3h\left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1}\right).$$

Знаки словами: вода в сосуде 1 прибыла на $\frac{\rho_0}{2\rho_1}h$, в сосуде 2 убыла на

$\frac{\rho_0}{2\rho_1}h$, в сосуде 3 убыла на $\frac{3\rho_0}{2\rho_1}h$ — а верхний уровень поднялся везде, потому что масло прибавило больше, чем ушло воды.



Равновесие при $\rho_0 = 0{,}8\rho_1$ и $H = 3h$: уровни поднялись на $1{,}4h$, $1{,}6h$, $1{,}8h$ и $1{,}2h$ (рисунок в масштабе)



Давление у дна в высотах водяного столба: вода в сосуде плюс эквивалент масла дают $4{,}2h$ в каждом сосуде

Обратите внимание: Δh_i в сосудах 1–3 — это подъём верхней поверхности (масла), а не воды. И масло не может попасть в сосуд 4 и в канал: это условие того, что вода из сосудов не вытесняется полностью.

Проверка. Размерность: Δh_i — длины. Объём: сумма подъёмов уровней, умноженная на S, равна объёму налитого масла $S(h + 2h + 3h)$:

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 = h\,(1 + 2 + 3) + \frac{\rho_0}{\rho_1} h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) = 6h.$$

Пределы: при $\rho_0 \to 0$ (невесомое масло) вода не перетекает и $\Delta h_i = k_i h$, $\Delta h_4 = 0$; при $\rho_0 = \rho_1$ (масло — та же вода) все $\Delta h_i = \frac{3}{2} h$: $6h$ воды поровну на четыре сосуда. Численная проверка на рисунке: при $\rho_0 = 0{,}8\rho_1$, $H = 3h$ давления у дна $3{,}4 + 0{,}8 = 2{,}6 + 1{,}6 = 1{,}8 + 2{,}4 = 4{,}2$ в единицах $\rho_1 g h$, а $1{,}4 + 1{,}6 + 1{,}8 + 1{,}2 = 6{,}0$.

Ответ.

$$\Delta h_1 = h \left(1 + \frac{\rho_0}{2\rho_1} \right), \quad \Delta h_2 = 2h \left(1 - \frac{\rho_0}{4\rho_1} \right),$$

$$\Delta h_3 = 3h \left(1 - \frac{\rho_0}{2\rho_1} \right), \quad \Delta h_4 = \frac{3\rho_0}{2\rho_1} h$$

(уровни во всех сосудах поднимаются).