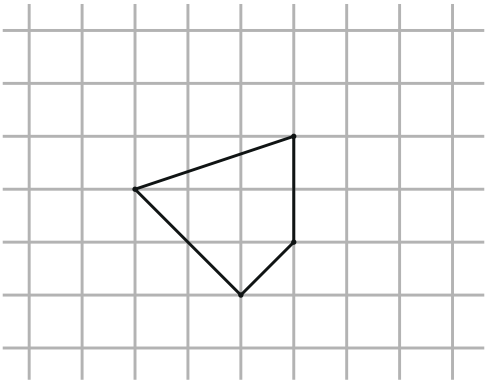
Линза превращает четырёхугольник в квадрат

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, комплект 1, задача 5] На рисунке изображён выпуклый четырёхугольник. Где нужно расположить тонкую собирающую линзу, и каким должно быть её фокусное расстояние, чтобы изображение четырёхугольника имело форму квадрата? Решить задачу графически и обосновать все сделанные построения на основе законов геометрической оптики (правильное построение без обоснования и комментариев не будет считаться правильным ответом). Оценить по рисунку фокусное расстояние этой линзы, считая, что одна клеточка на рисунке равна 1 см.

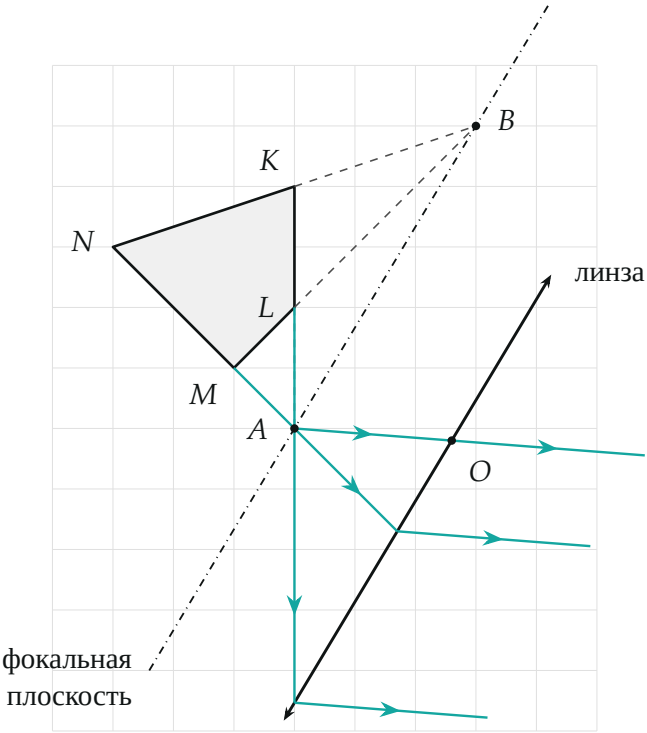


▲ **Решение. Что происходит.** Квадрат — это параллелограмм (противоположные стороны параллельны), у которого стороны перпендикулярны (прямоугольник) и диагонали перпендикулярны (ромб). Поэтому нужно выполнить три условия: изображения противоположных сторон параллельны; изображения сторон разных пар перпендикулярны; изображения диагоналей перпендикулярны. Главная идея: лучи, которые до линзы пересекаются в точке фокальной плоскости, после линзы идут параллельно лучу, проведённому из этой точки через центр линзы. Поэтому каждое условие превращается в вопрос: лежит ли точка в фокальной плоскости и под каким углом из центра линзы видны две такие точки. Класс задачи — построение пересечением двух окружностей.

Договорённости. Плоскость рисунка содержит главную оптическую ось, линза на рисунке — отрезок, и изображение тоже лежит в плоскости рисунка. Вершины четырёхугольника K, L, M, N; продолжения сторон KL и MN пересекаются в точке A, сторон LM и NK — в точке B; диагонали KM и LN пересекают прямую AB в точках C и D. Координаты в клетках (начало — левый нижний узел сетки): $K(5;4)$, $L(5;2)$, $M(4;1)$, $N(2;3)$, $A(5;0)$, $B(8;5)$, $C(2;-5)$, $D(6;\frac{5}{3})$; O — центр линзы, F — фокусное расстояние.

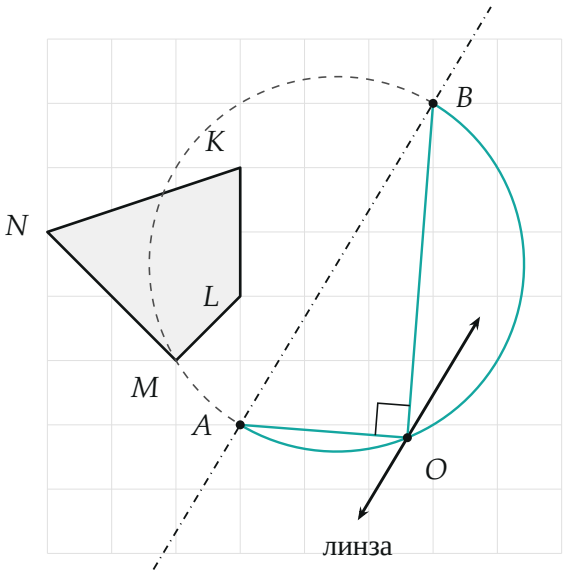
1. Что даёт линза лучам. Используем два правила. Луч через оптический центр не преломляется. Все лучи, идущие из одной точки P фокальной плоскости, после тонкой линзы параллельны побочной оптической оси — лучу PO (обратный ход лучей: параллельный пучок собирается в точке фокальной плоскости). Для изображения отрезка возьмём лучи вдоль самих сторон: луч идёт вдоль стороны и проходит через оба её конца, значит, изображения концов лежат на этом луче после линзы, и изображение стороны лежит на преломлённом луче.

2. Условие параллельности сторон. Лучи вдоль KL и MN пересекаются в A. Их изображения параллельны, только если после линзы эти лучи параллельны, то есть до линзы они пересекаются в фокальной плоскости: A лежит в ней. То же верно для B. Значит, фокальная плоскость — прямая AB, линза параллельна ей на расстоянии F (по ту сторону от AB, где нет четырёхугольника), а изображения сторон через A параллельны AO, а через B — параллельны BO.



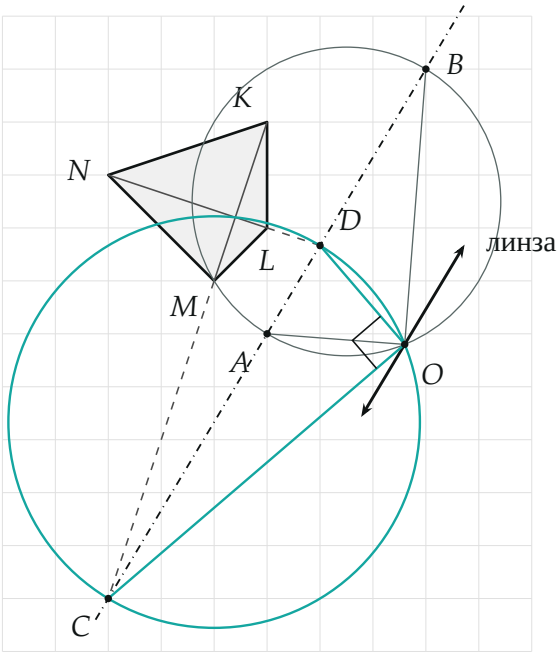
Лучи вдоль сторон KL и MN сходятся в точке A фокальной плоскости, после линзы они параллельны лучу AO (для B — так же)

3. Условие прямоугольника. Изображение — параллелограмм со сторонами, параллельными AO и BO. Он прямоугольник, если $AO \perp BO$: угол AOB прямой, и по теореме Фалеса центр O лежит на окружности с диаметром AB (на её полуокружности по ту сторону от AB, где стоит линза).



Центр линзы лежит на полуокружности с диаметром AB: $\angle AOB = 90°$

4. Условие перпендикулярности диагоналей. Диагонали KM и LN пересекают фокальную плоскость в C и D; их изображения параллельны OC и OD. Они перпендикулярны, если $\angle COD = 90°$, то есть O лежит ещё и на окружности с диаметром CD. Центр линзы — точка пересечения этих двух окружностей по ту сторону от AB, где нет четырёхугольника (вторая точка пересечения лежит по ту же сторону от AB, что и четырёхугольник: плоскость линзы рассекала бы его, и часть предмета оказалась бы за линзой).



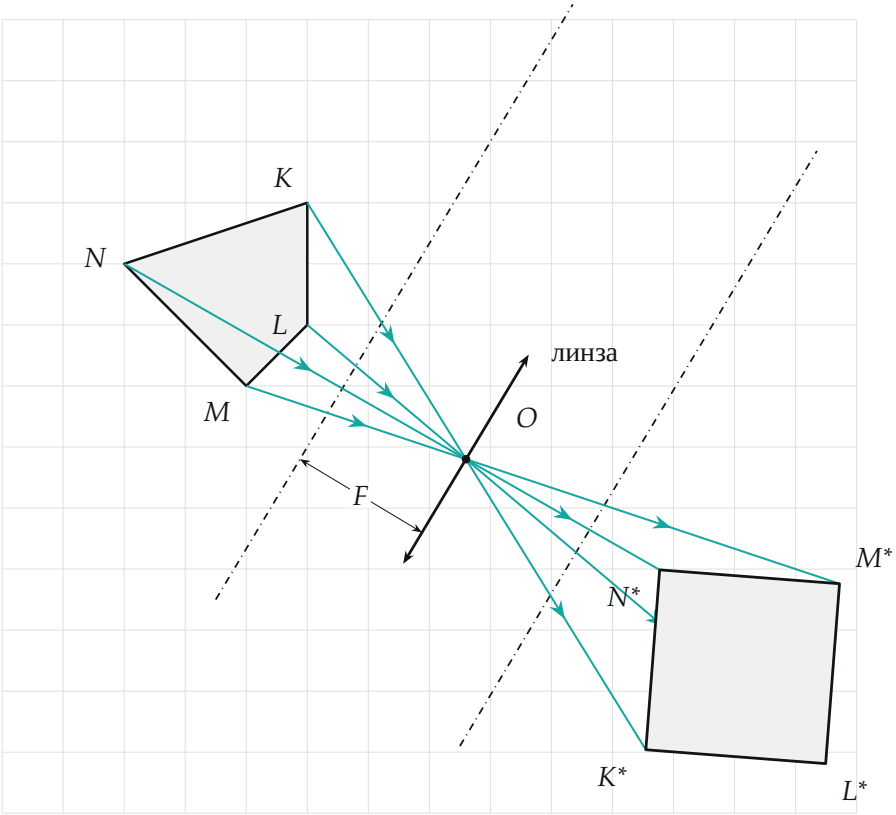
Центр линзы O — пересечение окружностей на диаметрах AB и CD; $\angle AOB = \angle COD = 90°$

5. Положение линзы и фокусное расстояние. Направим ось u вдоль AB с началом в A и единицей $|AB| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ клетки; v — расстояние от AB. Тогда $A(0), B(1), C(-1), D(\frac{1}{3})$. Окружность на диаметре AB: $u^2 - u + v^2 = 0$; на диаметре CD: $(u+\frac{1}{3})^2 + v^2 = (\frac{2}{3})^2$, то есть $u^2 + \frac{2}{3}u + v^2 = \frac{1}{3}$. Вычитание уравнений даёт $\frac{5}{3}u = \frac{1}{3}$, $u = \frac{1}{5}$, затем $v^2 = u - u^2 = \frac{4}{25}$, $v = \frac{2}{5}$. Центр линзы лежит на расстоянии

$$F = \frac{2}{5}|AB| = \frac{2\sqrt{34}}{5} \approx 2{,}33 \text{ клетки} \approx 2{,}3 \text{ см}$$

от прямой AB, и это расстояние равно фокусному расстоянию: фокальная плоскость AB отстоит от линзы на F. Основание перпендикуляра из O на AB делит AB в отношении $1:4$ от точки A. В клетках $O(7{,}6;\ -0{,}2)$: чуть ниже нижней линии сетки, правее четырёхугольника; плоскость линзы параллельна AB (направление $(3;5)$), главная ось перпендикуляр-

на ей.



Итог построения: изображение $K^*L^*M^*N^*$ — квадрат со стороной около 3 см; лучи через центр не преломляются

Обратите внимание: AB — фокальная плоскость, а не оптическая ось: линза параллельна AB, ось ей перпендикулярна. Одного условия на стороны мало: окружность на AB даёт целое семейство положений линзы (прямоугольник), условие на диагонали выбирает единственное.

Проверка. Второй способ — высота прямоугольного треугольника. Если P — основание перпендикуляра из O на AB, то из $\angle AOB = 90^\circ$ следует $OP^2 = AP \cdot PB$, а из $\angle COD = 90^\circ$ следует $OP^2 = CP \cdot PD$. Для $P(x)$ на оси u: $x(1-x) = (x+1)(\frac{1}{3} - x)$, откуда $x = \frac{1}{5}$, $OP^2 = \frac{4}{25}$, $OP = \frac{2}{5}|AB|$ — то же. Численная проверка по формуле тонкой линзы

$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ для четырёх вершин (d — расстояние до плоскости линзы): получается четырёхугольник со всеми сторонами 2,96 см и всеми углами 90°, диагонали перпендикулярны. Оценка по рисунку: от O до прямой AB примерно две с третью клетки, $F \approx 2{,}3$ см. У организаторов в ответе $F \approx 3$ см («около двух диагоналей клетки», то есть $2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ см) — это грубая оценка «на глаз» по их рисунку. По точным координатам вершин построение даёт $F = \frac{2}{5}\sqrt{34} \approx 2{,}33$ см, около 1,65 диагонали клетки; $F = 3$ см невозможно даже для прямоугольника: точка окружности с диаметром AB отстоит от прямой AB не больше чем на радиус $\frac{1}{2}\sqrt{34} \approx 2{,}92$ см. Поэтому верным считаем $F \approx 2{,}3$ см.

Ответ. Центр линзы — точка пересечения окружностей с диаметрами AB и CD по ту сторону от AB, где нет четырёхугольника (в клетках $(7{,}6;\ -0{,}2)$), плоскость линзы параллельна AB; фокусное расстояние $F = \frac{2}{5}|AB| \approx 2{,}3$ см.