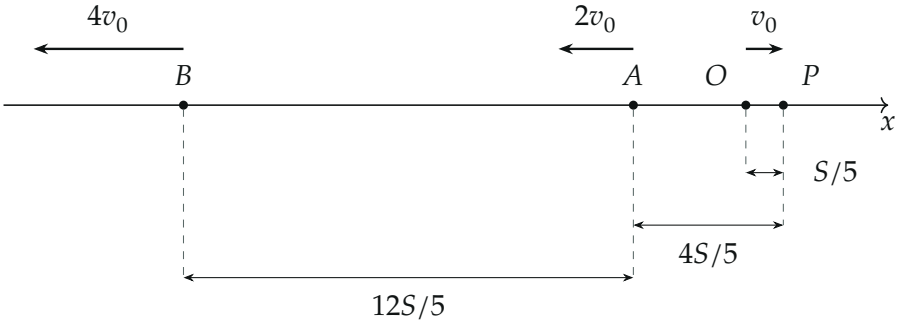
Ускоренное движение с разворотом

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, площадка 2, задача 1] Тело движется с постоянным ускорением a из некоторой точки. Известно, что начальная скорость тела не равна нулю, и когда тело прошло путь S после начала движения, его скорость увеличилась в 2 раза по величине по сравнению с начальной скоростью, но стала ей противоположной. Через какое время после этого скорость тела возрастет еще в 2 раза?

▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение постоянное, поэтому скорость меняется по линейному закону. Раз скорость стала противоположной начальной, а по модулю больше её, ускорение направлено *против* начальной скорости: тело сначала тормозит до остановки, потом разворачивается и разгоняется в обратную сторону. Это движение с постоянным ускорением и разворотом; главное в нём — различать *путь* (складывается из пути «туда» и пути «обратно») и *перемещение*. В условии сказано про путь S.



Поясняющий рисунок: ось x вдоль начальной скорости. O — начало, P — остановка, A — скорость $2v_0$ против оси (пройден путь S), B — скорость $4v_0$ против оси

Обозначения. Ось x направим вдоль начальной скорости: тогда проекция начальной скорости равна $v_0 > 0$, а проекция ускорения $a_x = -a$, где $a > 0$ — модуль ускорения. Время отсчитываем от начала движения. t_1 — момент остановки, t_2 — момент, когда проекция скорости равна

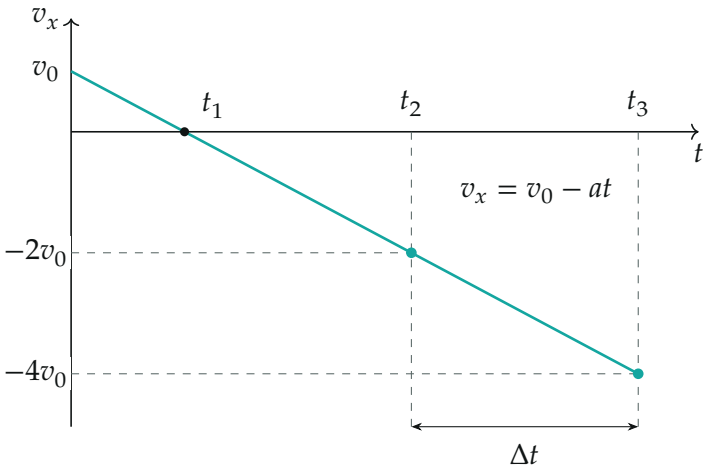
$-2v_0$ (к этому моменту пройден путь S), t_3 — момент, когда она равна $-4v_0$. Искомое время $\Delta t = t_3 - t_2$.

1. Закон изменения скорости. При постоянном ускорении

$$v_x(t) = v_0 - at.$$

Это прямая с наклоном $-a$. Скорость обращается в нуль, достигает $-2v_0$ и $-4v_0$ в моменты

$$t_1 = \frac{v_0}{a}, \qquad t_2 = \frac{3v_0}{a}, \qquad t_3 = \frac{5v_0}{a}.$$



Проекция скорости — прямая с наклоном $-a$; между $-2v_0$ и $-4v_0$ проходит время Δt

2. Что нужно найти. Проекция скорости убывает равномерно: за единицу времени на a. От $-2v_0$ до $-4v_0$ проекция скорости меняется на $2v_0$, поэтому

$$\Delta t = \frac{2v_0}{a} \quad \left(\text{или } \Delta t = t_3 - t_2 = \frac{5v_0}{a} - \frac{3v_0}{a}\right).$$

Неизвестной осталась начальная скорость v_0; её даст путь S.

3. Путь S**.** Путь — это длина всей траектории, а тело на ней развернулось. Поэтому складываем два участка (в каждом движение идёт в одну сторону). Для участка с постоянным ускорением удобна формула без времени: $v^2 - v_{\text{нач}}^2 = 2a_x\,\Delta x$.

- От начала до остановки (участок OP, скорость от v_0 до 0):

$$0 - v_0^2 = 2(-a)\,s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2a}.$$

- От остановки до момента t_2 (участок PA, скорость от 0 до $2v_0$ по модулю, ускорение теперь *ускоряет*):

$$(2v_0)^2 - 0 = 2a\,s_2 \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{4v_0^2}{2a} = \frac{2v_0^2}{a}.$$

Путь равен сумме:

$$S = s_1 + s_2 = \frac{v_0^2}{2a} + \frac{4v_0^2}{2a} = \frac{5v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2aS}{5}}.$$

Так же записано у организаторов: $4v_0^2 + v_0^2 = 2aS$. Тело прошло вперёд $S/5$ и вернулось назад на $4S/5$, поэтому в точке A оно оказалось на $3S/5$ *позади* начала.

Тот же путь — второй способ — равен площади под графиком модуля скорости (рисунок ниже): два треугольника, площади $\frac{1}{2}v_0t_1 = \frac{v_0^2}{2a}$ и $\frac{1}{2}\cdot 2v_0\,(t_2 - t_1) = \frac{2v_0^2}{a}$.

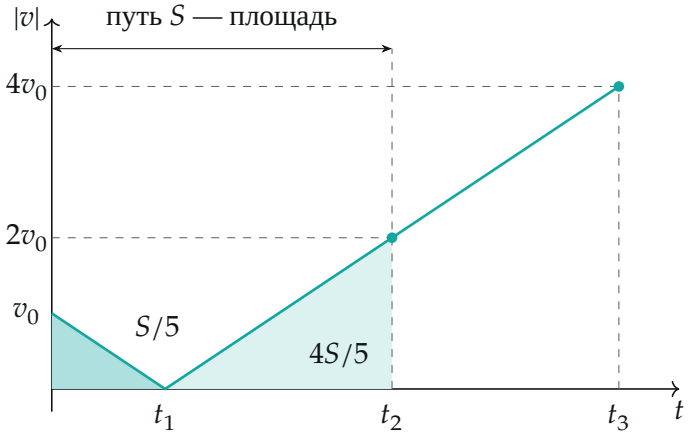
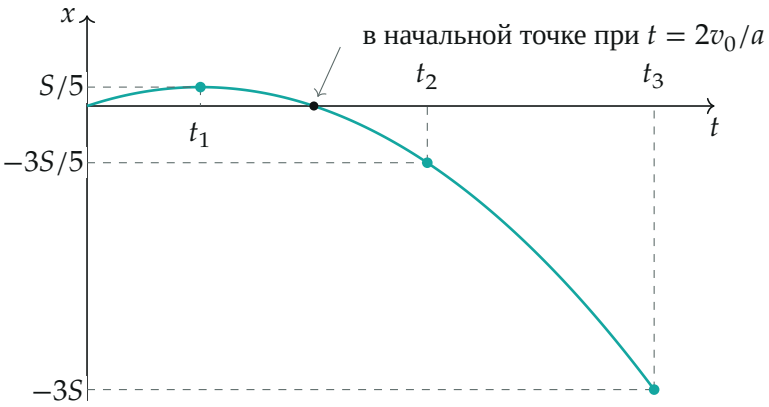


График модуля скорости: пройденный путь S — площадь под ним от 0 до t_2

4. Ответ через S и a. Подставим v_0 в формулу пункта 2:

$$\Delta t = \frac{2v_0}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{2aS}{5}} = \sqrt{\frac{8S}{5a}}.$$



Координата $x(t) = v_0t - at^2/2$: в t_1 тело в крайней правой точке, потом возвращается, проходит начало и уходит в минус

Обратите внимание. Если принять S за *перемещение*, получится другой ответ: перемещение к моменту t_2 равно $-3S/5$ по модулю, то есть

$|\Delta x| = 3v_0^2/(2a)$, и тогда вышло бы $v_0 = \sqrt{2aS/3}$. Слово «путь» в условии означает именно длину траектории.

Проверка. Размерность: $\sqrt{S/a}$ — $\sqrt{\text{м}/(\text{м}/\text{с}^2)} = \text{с}$. Численно: при $a = 2$ м/с^2 и $S = 10$ м получаем $v_0 = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ м/с, $t_2 = 4{,}24$ с, а пройденный путь, найденный численным суммированием $|v|\,dt$, равен 10,0 м; время между $-2v_0$ и $-4v_0$ равно 2,83 с, формула даёт $\sqrt{8 \cdot 10/(5 \cdot 2)} = 2{,}83$ с. Предел: $S \to 0$ ($v_0 \to 0$) — время $\Delta t \to 0$, как и должно быть. Смысл: пока ускорение постоянно, время набора скорости зависит только от начальной скорости, а её нам даёт условие про путь.

Ответ. $\Delta t = \dfrac{2v_0}{a} = \sqrt{\dfrac{8S}{5a}}$.