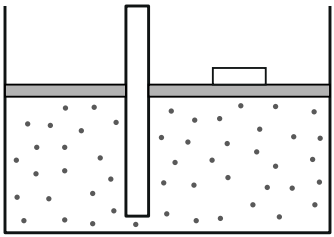
Два сосуда с поршнями

Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, площадка 2, задача 2] Имеется два вертикальных цилиндрических сосуда с разной площадью сечения, которые в своих нижних частях соединены тонкой трубкой. Сосуды закрыты подвижными поршнями одинаковой массы m. Поршни находятся в равновесии на одинаковой высоте h от дна сосуда, но на большем поршне лежит дополнительный груз массой $m/2$ (см. рисунок). В некоторый момент времени груз снимают с поршня. На какой высоте от дна сосуда окажется этот поршень после установления равновесия? Атмосферным давлением пренебречь, температура газа не меняется.



▲ **Решение. Что происходит.** Сосуды соединены трубкой, поэтому газ в них общий, а его давление p — одно и то же под обоими поршнями (давлением столба самого газа пренебрегаем). Атмосферы нет, так что каждый поршень удерживает только газ снизу. Пока на большом поршне лежит груз, оба поршня в равновесии при одном давлении. После снятия груза давление, нужное для равновесия большого поршня, уменьшается, а нужное малому — нет. Одно давление двум разным требованиям удовлетворить не может, и один из поршней неизбежно ляжет на дно. Дальше остаётся задача про газ с неизменными температурой и количеством: закон Бойля — Мариотта.

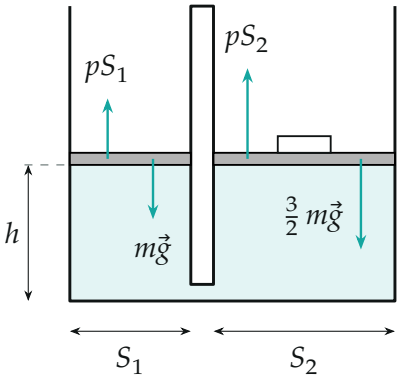
Обозначения. $S_1 < S_2$ — площади сечения малого и большого сосудов; p — давление газа до снятия груза; p_1, h_1 — давление газа и высота большого поршня над дном после установления равновесия; V_0, V_1 — объём газа до и после (объёмом трубки пренебрегаем). Вертикальную ось направим вверх.

1. Равновесие до снятия груза. У каждого поршня сумма сил равна нулю. Запишем второй закон Ньютона для малого поршня в проекции на вертикальную ось (покой, ускорение нуль): сила давления газа снизу уравновешивает вес,

$$pS_1 - mg = 0.$$

Для большого поршня вместе с грузом (вес $mg + \frac{1}{2}mg$):

$$pS_2 - \frac{3}{2}\,mg = 0.$$

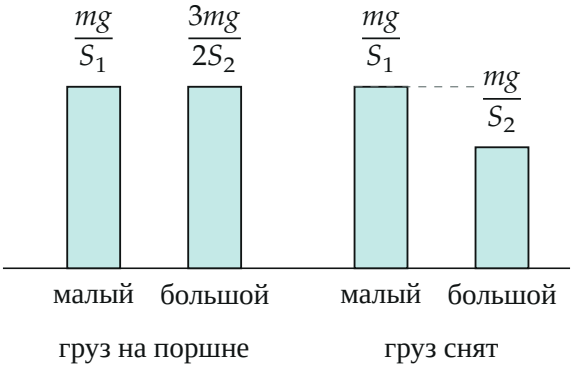


Силы на поршни до снятия груза: давление газа уравновешивает вес

Разделим уравнения друг на друга: неизвестное давление p сократится, и найдётся отношение сечений:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2}{3}, \qquad p = \frac{mg}{S_1} = \frac{3mg}{2S_2}.$$

2. Почему малый поршень ляжет на дно. После снятия груза вес большого поршня равен mg. Давление, при котором поршень *висит* в равновесии, определяется его весом и сечением: у малого $mg/S_1 = 3mg/(2S_2)$, у большого mg/S_2. Эти числа различны (первое в $\frac{3}{2}$ раза больше).



Давление, нужное для равновесия каждого поршня: до снятия груза требования совпадают, после — нет

Переберём возможные состояния (поршень либо висит, либо лежит на дне):

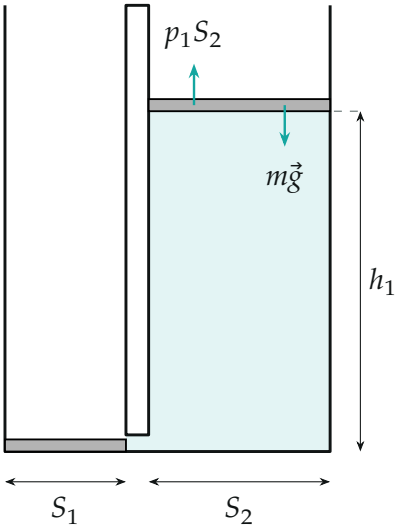
- *Оба поршня висят.* Давление должно равняться и mg/S_1, и mg/S_2 — невозможно.
- *Висит только малый, большой лежит на дне.* Тогда $p = mg/S_1 = 3mg/(2S_2)$, а сила давления на большой поршень $pS_2 = \frac{3}{2}mg$ больше его веса: он не может лежать, а должен подниматься. Невозможно.
- *Висит только большой, малый лежит на дне.* Тогда $p_1 = mg/S_2$, и на малый поршень снизу действует сила $p_1S_1 = \frac{2}{3}mg < mg$: вес больше, поршень прижат ко дну (реакция дна $N = mg - p_1S_1 = \frac{1}{3}mg > 0$). Возможно.

Значит, малый поршень оказывается на дне, весь газ — под большим поршнем, а давление становится

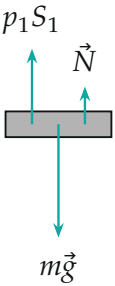
$$p_1 = \frac{mg}{S_2} = \frac{2}{3}p.$$

Качественная картина процесса: сразу после снятия груза давление p больше нужного большому поршню, он идёт вверх, газ расширяется, давление падает; как только оно становится меньше mg/S_1, малый поршень оседает и вытесняет газ под большой, пока давление не станет

mg/S_2.



силы на малый поршень



После снятия груза: малый поршень на дне, большой поднялся на h_1

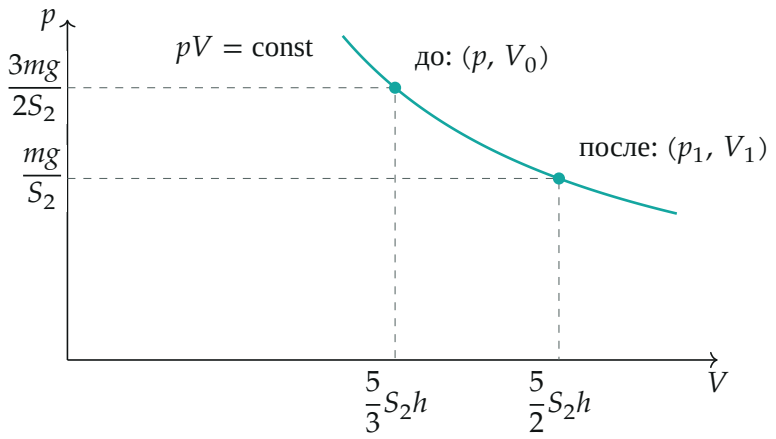
3. Высота большого поршня. Температура и количество газа не меняются, поэтому для начального и конечного равновесных состояний справедлив закон Бойля — Мариотта:

$$pV_0 = p_1V_1.$$

Объёмы: $V_0 = (S_1 + S_2)h = \frac{5}{3}S_2h$ (газ под обоими поршнями), $V_1 = S_2h_1$ (газ только под большим). Подставляем давления:

$$\frac{3mg}{2S_2}\cdot\frac{5}{3}S_2h = \frac{mg}{S_2}\cdot S_2h_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{2}mgh = mg\,h_1 \quad\Rightarrow\quad h_1 = \frac{5}{2}h.$$

То же вторым способом, через уравнение Клапейрона — Менделеева. Газ до снятия груза: $pV_0 = \nu RT$, то есть $\frac{mg}{S_1}(S_1h + S_2h) = \nu RT$. Газ после снятия: $p_1S_2h_1 = \nu RT$, то есть $mg\,h_1 = \nu RT$. Правые части равны, значит равны и левые: $mg\,h_1 = \frac{mg}{S_1}(S_1 + S_2)h$, откуда $h_1 = h\left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) = h\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}h$.



Два равновесных состояния лежат на одной изотерме; объём вырос в $\frac{3}{2}$ раза

Обратите внимание. Нельзя считать, что малый поршень остаётся на высоте h и «его держит то же давление»: из пункта 2 видно, что после снятия груза такого равновесия нет. Условие «атмосферным давлением пренебречь» принципиально: давящий сверху воздух добавил бы в условия равновесия слагаемое $p_a S$, и ответ зависел бы от p_a.

Проверка. Размерность: h_1 измеряется в тех же единицах, что и h. Согласованность: давление упало в $\frac{3}{2}$ раза, при постоянной температуре объём обязан вырасти во столько же раз: $\frac{5}{3}S_2h \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}S_2h = S_2h_1$ — совпало со вторым способом. Условие применимости: $p_1S_1 = \frac{2}{3}mg < mg$, малый поршень действительно лежит на дне. Смысл: газ расширился в $\frac{3}{2}$ раза и целиком оказался под широким поршнем, поэтому тот поднялся до $\frac{5}{2}h$.

Ответ. $h_1 = \dfrac{5}{2}h$ (малый поршень опустился на дно, весь газ оказался под большим поршнем).