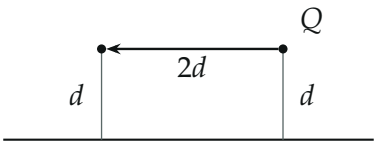
Заряд у проводящей плоскости

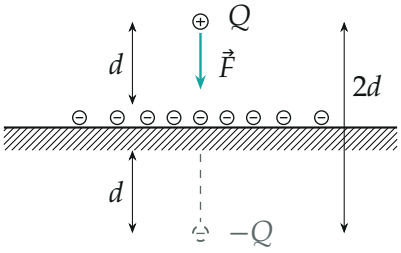
Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, площадка 2, задача 3] Точечный заряд Q находится на расстоянии d от очень большой проводящей плоскости. В некоторый момент времени заряд перемещают на расстояние $2d$ вдоль плоскости (см. рисунок), причем так быстро, что за время перемещения заряда Q заряды на плоскости не успели сместиться от своих первоначальных положений. Какое количество теплоты выделится в веществе плоскости в процессе установления равновесия?



▲ **Решение. Что происходит.** Заряд Q наводит на проводящей плоскости заряды, и они притягивают его. Если перемещать заряд медленно, наведённые заряды следуют за ним, система каждый момент находится в равновесии, и при сдвиге вдоль плоскости ничего не меняется. Здесь заряд сдвигают так быстро, что наведённые заряды остаются на старых местах, а потом растекаются по плоскости, и в веществе плоскости выделяется теплота (токи растекания, закон Джоуля — Ленца). Нужно найти энергию, которая при этом уходит. Это баланс энергии для проводника и заряда; считать удобно методом изображений: поле наведённых зарядов вне проводника такое же, как поле заряда $-Q$ в зеркальной точке.

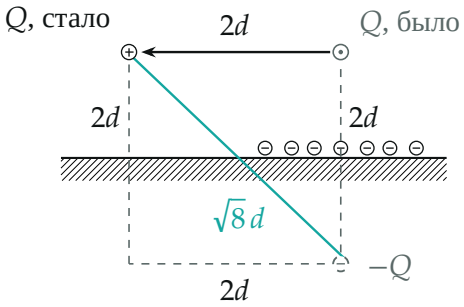
Обозначения. k — постоянная закона Кулона; A — работа внешней силы при перемещении заряда Q; W_0 — энергия системы «заряд + плоскость» в равновесном состоянии, когда заряд на расстоянии d от плоскости; q — искомая теплота. Кинетической энергии у заряда в начале и в конце нет: он покоится.

1. Метод изображений до перемещения. Заряды, индуцированные на плоскости, действуют на Q так же, как точечный заряд $-Q$, расположенный по другую сторону плоскости на том же расстоянии d, то есть на расстоянии $2d$ от Q (сила притяжения $kQ^2/(2d)^2$, направлена к плоскости).



Метод изображений: наведённые заряды плоскости действуют на Q как заряд $-Q$ в зеркальной точке

2. Что значит «не успели сместиться». Пока заряд Q движется, наведённые заряды остаются в прежнем распределении. Значит, их поле по-прежнему такое, как у заряда $-Q$ в *старой* зеркальной точке, которая не следует за Q. Заряд Q перемещается в поле неподвижного точечного заряда $-Q$.



Заряд перемещается в поле неподвижного изображения: расстояние от $-Q$ до Q меняется с $2d$ до $\sqrt{8}\,d$

3. Работа внешней силы. Перемещение вдоль плоскости на $2d$: расстояние от неподвижного $-Q$ до Q меняется от $r_1 = 2d$ до

$$r_2 = \sqrt{(2d)^2 + (2d)^2} = 2\sqrt{2}\,d.$$

Потенциальная энергия точечных зарядов Q и $-Q$ на расстоянии r равна $U = -kQ^2/r$. Работа внешней силы идёт на изменение этой энергии

(кинетическая энергия не изменилась):

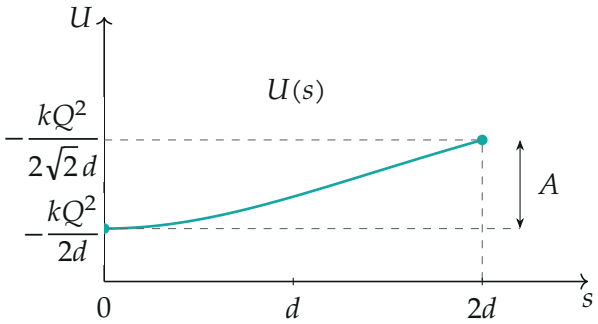
$$A = U_2 - U_1 = -\frac{kQ^2}{2\sqrt{2}\,d} + \frac{kQ^2}{2d} = \frac{kQ^2}{d}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}15\,\frac{kQ^2}{d}.$$

Знак: $A > 0$ — внешняя сила работает против притяжения изображения.

Второй способ — прямо по силе. Пусть s — пройденное вдоль плоскости расстояние. Расстояние до изображения равно $r = \sqrt{s^2 + 4d^2}$, сила притяжения kQ^2/r^2, а её проекция на направление движения (против него) равна $\dfrac{kQ^2}{r^2}\cdot\dfrac{s}{r}$. Внешняя сила уравновешивает эту проекцию, поэтому

$$A = \int_0^{2d} \frac{kQ^2\,s\,ds}{(s^2+4d^2)^{3/2}} = kQ^2\left[-\frac{1}{\sqrt{s^2+4d^2}}\right]_0^{2d} = kQ^2\left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{2\sqrt{2}\,d}\right).$$

Тот же результат.

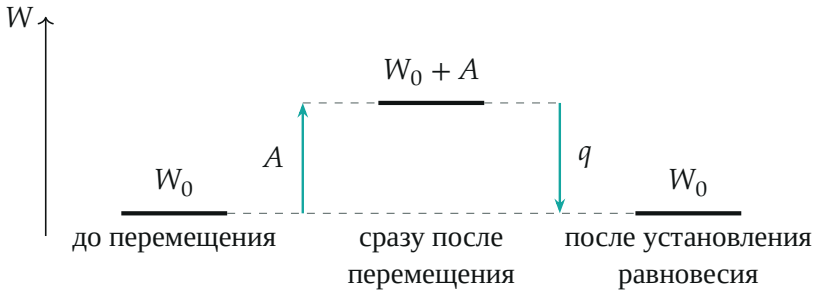


Потенциальная энергия $U(s) = -kQ^2/\sqrt{s^2+4d^2}$ заряда в поле неподвижного изображения: работа A — разность значений в конце и в начале пути

4. Куда ушла энергия. Сразу после перемещения энергия системы равна $W_0 + A$, ведь внешние силы совершили работу A, а заряды плоскости ещё не перераспределились. Потом наведённые заряды растекаются по плоскости до равновесия. Плоскость очень большая и однородная, поэтому конечное состояние не отличается от начального: заряд снова

на расстоянии d от плоскости, и энергия системы снова W_0. Всё лишнее выделилось в виде теплоты в веществе плоскости (электрическая энергия не теряется нигде больше: излучением пренебрегаем):

$$q = (W_0 + A) - W_0 = A = \frac{kQ^2}{d} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$



Баланс энергии: работа A запасается в системе, при растекании зарядов целиком переходит в теплоту

Обратите внимание. Работа вычисляется в поле изображения, оставшегося в *старой* точке. Если считать, что изображение сдвигается вместе с зарядом (заряды успевают перераспределяться), то расстояние до него всё время $2d$, работа равна нулю и тепла нет. Именно слова «не успели» дают ответ, отличный от нуля.

Проверка. Размерность: kQ^2/d — энергия (кулоновская энергия двух зарядов на расстоянии d). Предельные случаи: при перемещении на $\Delta \to 0$ работа $\to 0$ (изменения расстояния нет); при очень большом перемещении $r_2 \to \infty$, и $A \to kQ^2/(2d)$ — заряд полностью выведен из поля изображения, это энергия его притяжения к зеркальной точке. Смысл: теплота — это плата за то, что заряд увели от «своего» изображения быстрее, чем плоскость успела перестроиться.

Ответ. $q = \dfrac{kQ^2}{d} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{(2-\sqrt{2})\,kQ^2}{4d} \approx 0{,}15\,\dfrac{kQ^2}{d}$.