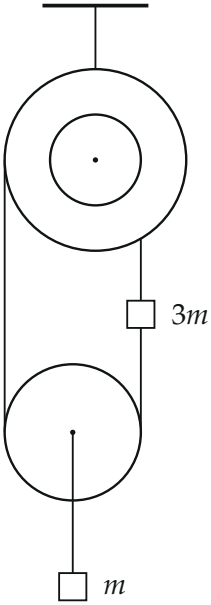
Блок из двух дисков и два груза

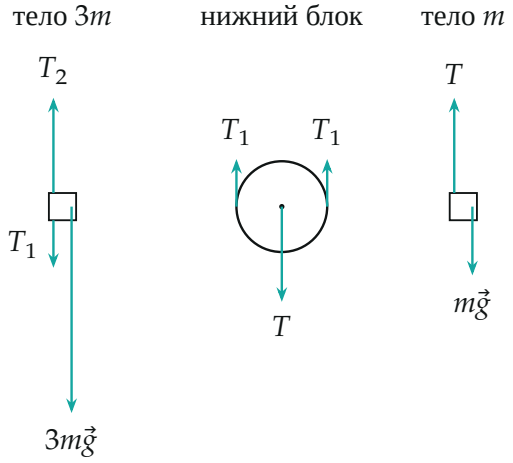
Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, площадка 2, задача 4] Блок склеен из двух дисков с радиусами R и $2R$, насаженных на одну и ту же горизонтальную ось, и подвешен к горизонтальному потолку. На блоки намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой прикреплен груз массой m, как это показано на рисунке. Нить охватывает также нижний блок, размеры которого подобраны так, что все отрезки нити вертикальны. Второй груз массой $3m$ прикреплен к оси нижнего блока. Найти ускорение тел. Блоки невесомы.



▲ **Решение. Что происходит.** Нить скользит по нижнему блоку, а верхний блок — два склеенных диска разного радиуса — поворачивается как целое: с малого диска нить сматывается, а на большой наматывается, причём на большой — вдвое больше. Поэтому грузы движутся в противоположные стороны с разными ускорениями. Класс задачи — блоки: неизвестны два ускорения и три натяжения, и нужны *три* связи — условия равновесия невесомых блоков (по силам и по моментам) и кинематическая связь через нерастяжимость нити.

О рисунке и тексте. На рисунке (и в решении организаторов) груз $3m$ закреплён *на нити*, на правой вертикальной ветви, а груз m висит *на оси нижнего блока*. В тексте условия подписи перепутаны (там наоборот), поэтому решаем по рисунку — так же, как у организаторов. Результат для прямого прочтения текста указан в замечании в конце.

Обозначения. Ось x направим вертикально вниз. a_1, a_2 — проекции ускорений грузов $3m$ и m на ось x. T_2 — натяжение нити над грузом $3m$ (между малым диском и грузом); T_1 — натяжение нити ниже груза $3m$ (до нижнего блока), оно же на левой ветви (между нижним блоком и большим диском): нижний блок невесом, поэтому по обе стороны от него натяжение одинаково; T — сила, с которой тянет вниз груз m за ось нижнего блока.



Силы на тела: груз $3m$, нижний блок (невесомый), груз m

1. Нижний блок. Блок невесом, значит, сумма сил на него равна нулю (иначе при нулевой массе ускорение было бы бесконечным). Две нити тянут его вверх с силой T_1 каждая, груз m тянет вниз силой T (в проекциях на ось x):

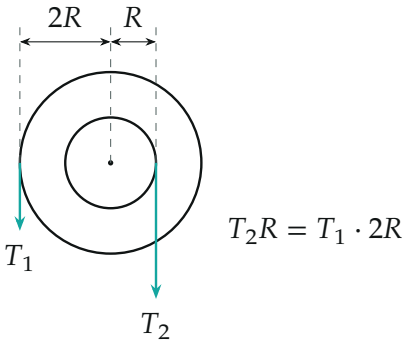
$$-2T_1 + T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 2T_1.$$

2. Верхний блок. Он тоже невесом, значит, сумма моментов сил относительно его оси равна нулю (иначе при нулевом моменте инерции уг-

ловое ускорение было бы бесконечным). Нить действует на малый диск силой T_2 с плечом R (вниз справа от оси), а на большой диск — силой T_1 с плечом $2R$ (вниз слева от оси); эти моменты вращают блок в разные стороны:

$$T_2 R = T_1 \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1.$$

Реакция подвеса момента не создаёт (проходит через ось), поэтому в уравнение не входит.



Верхний блок: моменты сил нити относительно оси

3. Второй закон Ньютона для грузов в проекциях на ось x (вниз). На груз $3m$ действуют: $3mg$ вниз, T_2 вверх, T_1 вниз:

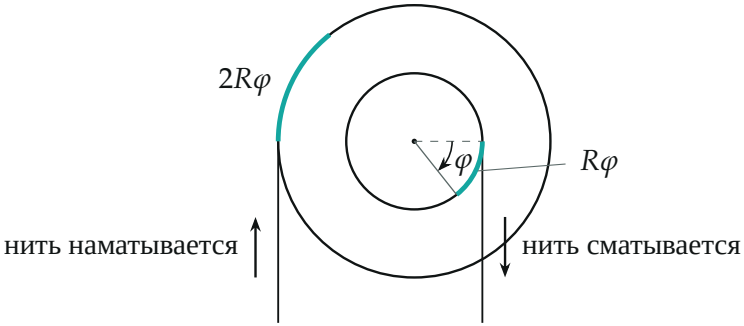
$$3m\,a_1 = 3mg + T_1 - T_2 = 3mg - T_1.$$

На груз m: вес mg вниз и T вверх:

$$m\,a_2 = mg - T = mg - 2T_1.$$

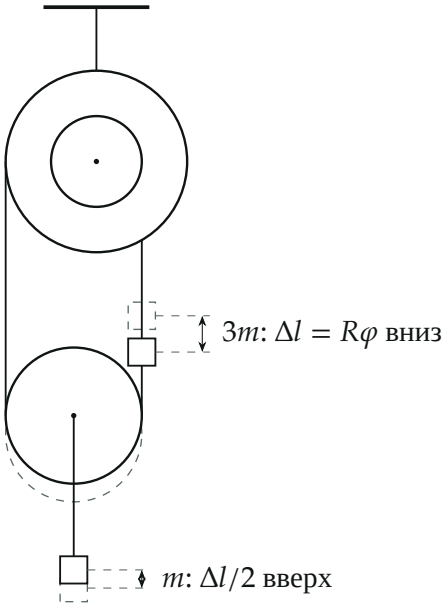
Неизвестных три (a_1, a_2, T_1), уравнений два; нужна кинематическая связь.

4. Кинематическая связь (нерастяжимость нити). Пусть блок повернулся на малый угол φ так, что правая ветвь пошла вниз (если в действительности наоборот, угол φ окажется отрицательным). С малого диска сматывается нить длиной $R\varphi$, на большой наматывается $2R\varphi$. Груз $3m$ сидит на нити правой ветви, поэтому он опускается на $\Delta l = R\varphi$.



Поворот верхнего блока на φ: с малого диска сматывается дуга $R\varphi$, на большой наматывается дуга $2R\varphi$

Теперь по длине нити. Свободная часть нити — две вертикальные ветви длиной Y каждая плюс дуга вокруг нижнего блока (её длина не меняется). Она укоротилась на разность намотанного и смотанного: $2R\varphi - R\varphi = R\varphi$, то есть $2\,\Delta Y = -R\varphi$: нижний блок, а с ним груз m, поднимается на $\Delta Y = \Delta l/2$.



Груз $3m$ опускается на $\Delta l = R\varphi$, нижний блок и груз m поднимаются на $\Delta l/2$ (пунктир — начальное положение)

Связь перемещений верна в любой момент, поэтому такая же связь у скоростей и ускорений:

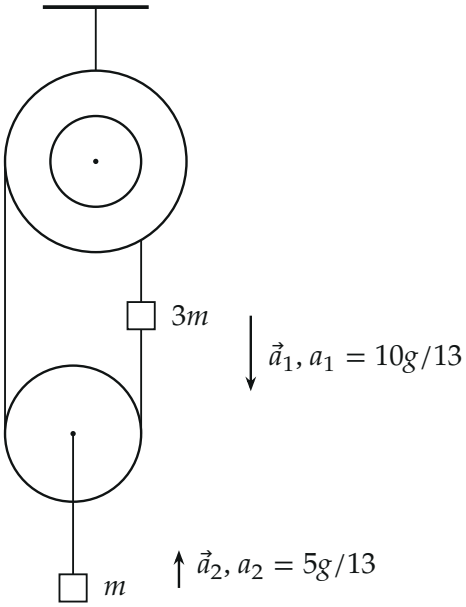
$$a_2 = -\frac{a_1}{2}.$$

Знак минус: грузы движутся в противоположные стороны.

5. Решение. Из первого уравнения пункта 3 выразим $T_1 = 3m(g - a_1)$ и подставим во второе вместе с $a_2 = -a_1/2$:

$$-\frac{ma_1}{2} = mg - 6m(g - a_1) \quad \Rightarrow \quad 5g = \frac{13}{2}a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{10}{13}g.$$

Тогда $a_2 = -\frac{5}{13}g$. Знак: $a_1 > 0$ — груз $3m$ опускается; $a_2 < 0$ — груз m поднимается. Натяжения: $T_1 = 3m\left(g - \frac{10}{13}g\right) = \frac{9}{13}mg$, $T_2 = T = \frac{18}{13}mg$ (оба положительны, нить натянута).



Результат: груз $3m$ опускается с ускорением $10g/13$, груз m поднимается с ускорением $5g/13$

Обратите внимание. Натяжения нити по разные стороны *верхнего* блока различны ($T_2 = 2T_1$): он составной, радиусы дисков разные, и

равенство натяжений там не выполняется. Равны они только у нижнего простого блока.

Проверка. Размерность: g — ускорение. Второй способ — энергия. Блоки невесомы, трения нет, поэтому мощность силы тяжести равна скорости роста кинетической энергии грузов. При скорости v груза $3m$ скорость груза m равна $v/2$ вверх, ускорения — a_1 и $a_1/2$:

$$3m\,v\,a_1 + m\,\frac{v}{2}\cdot\frac{a_1}{2} = 3mg\,v - mg\,\frac{v}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{13}{4}\,a_1 = \frac{5}{2}\,g \quad\Rightarrow\quad a_1 = \frac{10}{13}\,g.$$

Совпало. Смысл: на большой диск нить наматывается вдвое быстрее, чем сматывается с малого, поэтому нижний блок движется вдвое медленнее груза $3m$ и в противоположную сторону: тяжёлый груз опускается, лёгкий поднимается.

Если читать текст условия буквально (груз m на нити, груз $3m$ на оси нижнего блока). Связи пунктов 1, 2 и 4 от масс не зависят, меняются только массы во втором законе Ньютона: $ma_1 = mg - T_1$ для груза на нити и $3ma_2 = 3mg - 2T_1$, $a_2 = -a_1/2$ для груза на оси. Выражаем $T_1 = m(g - a_1)$ и подставляем: $-\dfrac{3ma_1}{2} = 3mg - 2m(g - a_1)$, откуда $\dfrac{7}{2}\,a_1 = -g$, $a_1 = -\dfrac{2}{7}\,g$. Знак минус: груз m на нити идёт *вверх* с ускорением $\dfrac{2}{7}\,g$, а груз $3m$ на оси — вниз с ускорением $\dfrac{1}{7}\,g$. Проверка той же энергией: $mva_1 + 3m\dfrac{v}{2}\dfrac{a_1}{2} = mgv - 3mg\dfrac{v}{2}$, $\dfrac{7}{4}a_1 = -\dfrac{g}{2}$ — совпало. $T_1 = \frac{9}{7}\,mg > 0$ — нить натянута, ответ допустим. Ответ организаторов $\dfrac{10}{13}\,g$ и $\dfrac{5}{13}\,g$ получается для расположения грузов по рисунку.

Ответ. Груз $3m$ (на нити) опускается с ускорением $a_1 = \dfrac{10}{13}\,g$, груз m (на оси нижнего блока) поднимается с ускорением $a_2 = \dfrac{5}{13}\,g$ (по рисунку, как у организаторов). По тексту (m на нити, $3m$ на оси): m вверх с $\frac{2}{7}g$, $3m$ вниз с $\frac{1}{7}g$.