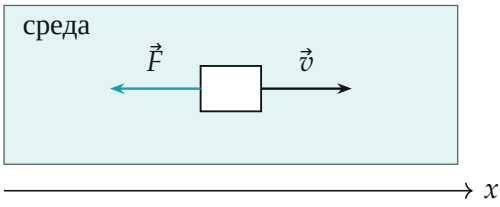
Торможение силой, пропорциональной v^2

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, площадка 2, задача 5] Тело движется в некоторой среде. Известно, что сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости тела. Известно, что скорость тела уменьшилась в 2 раза, через время T после начала движения. Через какое время после этого скорость тела уменьшится еще втрое? Всеми другими силами, кроме силы сопротивления среды, пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Единственная сила — сопротивление среды, направленная против скорости. Чем меньше скорость, тем слабее сила ($F \sim v^2$), поэтому торможение затухает: скорость стремится к нулю, но никогда его не достигает. Закон $v(t)$ поэтому не линейный, и второе уменьшение скорости потребует больше времени, чем первое. Это задача на силу, зависящую от скорости: записываем второй закон Ньютона для малого промежутка dt, разделяем переменные и находим величину, которая меняется со временем линейно.



Поясняющий рисунок: тело в среде, сила сопротивления $\vec{F}$ направлена против скорости $\vec{v}$

Обозначения. Ось x направим вдоль движения тела, тогда проекция скорости $v > 0$, а сила сопротивления в проекции равна $-\alpha v^2$ ($\alpha > 0$ — коэффициент, m — масса тела). v_0 — начальная скорость; $k = \alpha/m$.

1. Второй закон Ньютона для малого промежутка dt. Рассмотрим малый промежуток времени dt, за который скорость меняется на dv (за него v можно считать постоянной в правой части):

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v^2 \quad \Rightarrow \quad dv = -kv^2\,dt.$$

Знак минус: скорость убывает, пока тело движется (тормозящая сила против скорости).

2. Разделение переменных. Поделим на v^2:

$$-\frac{dv}{v^2} = k\,dt.$$

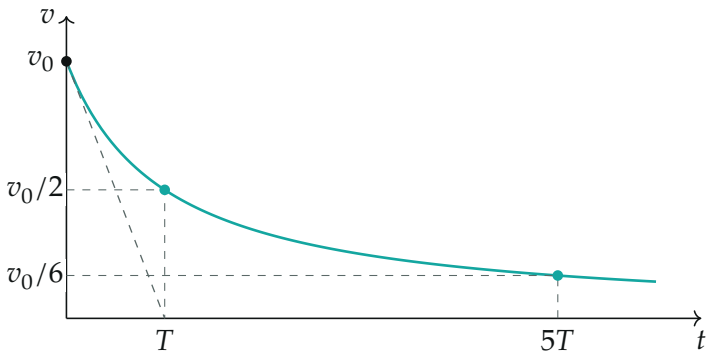
Левая часть — это в точности приращение величины $1/v$: $d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$. Значит,

$$d\left(\frac{1}{v}\right) = k\,dt.$$

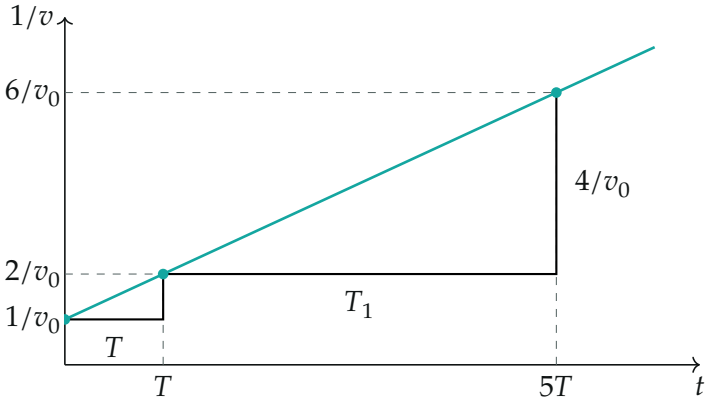
Приращения $1/v$ и времени пропорциональны с постоянным коэффициентом k. Просуммируем малые приращения от начала движения до момента t (пока скорость не нулевая):

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

Величина $1/v$ растёт со временем линейно, а скорость $v = \dfrac{v_0}{1 + kv_0 t}$ убывает по гиперболе, никогда не обращаясь в нуль.



Скорость убывает по закону $v = v_0/(1 + t/T)$. Пунктир из точки v_0 — касательная при $t = 0$: если бы сила не слабела, тело остановилось бы за время T



Величина $1/v$ растёт со временем по прямой; равные наклоны шагов дают пропорциональность времени и изменения $1/v$

3. Что даёт первое условие. К моменту T скорость $v_0/2$, то есть $1/v = 2/v_0$:

$$\frac{2}{v_0} = \frac{1}{v_0} + kT \quad \Rightarrow \quad kT = \frac{1}{v_0}.$$

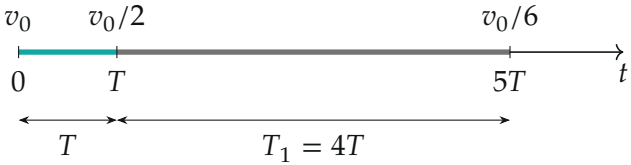
4. Что нужно найти. Пусть скорость стала в 6 раз меньше начальной ($v_0/2$ ещё в 3 раза меньше) в момент $t_1 = T + T_1$; тогда $1/v = 6/v_0$:

$$\frac{6}{v_0} = \frac{1}{v_0} + k(T + T_1) \quad \Rightarrow \quad k(T + T_1) = \frac{5}{v_0}.$$

Подставим $kT = 1/v_0$ и вычтем:

$$kT_1 = \frac{5}{v_0} - \frac{1}{v_0} = \frac{4}{v_0} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{4}{kv_0} = 4T.$$

Тот же результат прямо по шагам графика $1/v$: за первое время T величина $1/v$ выросла на $1/v_0$ (от $1/v_0$ до $2/v_0$), за второе она растёт на $4/v_0$ (от $2/v_0$ до $6/v_0$) при том же наклоне — значит, и времени нужно в 4 раза больше.



Шкала времени: скорость в 2 раза падает за T, ещё в 3 раза — за $4T$

Обратите внимание. «Ещё втрое» — от нынешней скорости $v_0/2$, то есть до $v_0/6$, а не до $v_0/3$. Время получается больше первого ($4T > T$): при квадратичном сопротивлении торможение слабеет вместе со скоростью. Для силы, пропорциональной скорости, ответ был бы другим ($T \log_2 3$).

Проверка. Размерность: искомое время выражается через T множителем 4 — величина того же рода. Подстановка в найденный закон $v(t) = v_0/(1 + t/T)$: $v(T) = v_0/2$ (условие), $v(5T) = v_0/6$, то есть момент $5T$ минус T даёт $4T$. Численное интегрирование уравнения $dv/dt = -kv^2$ малыми шагами даёт те же T и $5T$. Смысл: скорость убывает как $1/t$, поэтому каждое следующее уменьшение требует всё больше времени.

Ответ. $T_1 = 4T$.