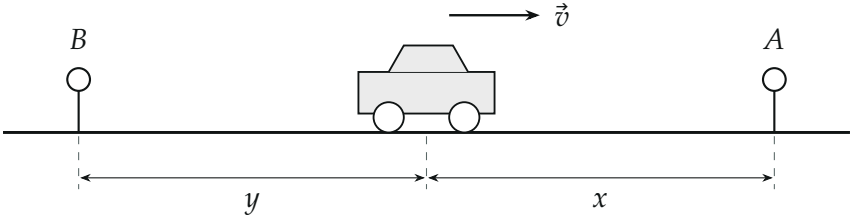
Длительность сигнала автомобиля

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Автомобиль, движущийся по прямому шоссе, издаёт продолжительный звуковой сигнал. Датчики, расположенные по и против хода движения автомобиля, зарегистрировали длительности сигнала Δt и $1{,}05\,\Delta t$. Какую длительность сигнала зарегистрировал расположенный по, а какую против направления движения автомобиля? Найти скорость автомобиля, если скорость звука в воздухе равна c.



Поясняющий рисунок: A — датчик по ходу движения, B — против хода; x и y — расстояния от автомобиля до датчиков в момент начала сигнала

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль излучает сигнал в течение времени $\Delta\tau$ и за это время сам проезжает путь $v\,\Delta\tau$. Перед автомобилем он «догоняет» собственный звук, поэтому передний звуковой пакет сжат, а позади — растянут. Датчики неподвижны относительно воздуха, а скорость звука относительно воздуха равна c и не зависит от скорости источника. Главная идея: длительность, которую регистрирует датчик, — это разность моментов прихода конца и начала сигнала. Это задача на излучение движущегося источника (эффект Доплера, записанный для длительности): приём = излучение + разность времён распространения.

Обозначения. $\Delta\tau$ — длительность излучения (по часам автомобиля; при $v \ll c$ у всех часов время одно), $\beta = v/c$; A — датчик по ходу, B — против хода; x и y — расстояния от автомобиля до A и B в момент начала сигнала; Δt_A и Δt_B — длительности, которые зарегистрировали датчики. Моменты отсчитываем от начала излучения.

1. Приход начала сигнала. Начало сигнала излучено в момент 0 и идёт со скоростью c:

$$t_A^{\text{нач}} = \frac{x}{c}, \qquad t_B^{\text{нач}} = \frac{y}{c}.$$

2. Приход конца сигнала. Конец сигнала излучён в момент $\Delta\tau$, когда автомобиль проехал $v\,\Delta\tau$: до A осталось $x - v\Delta\tau$, до B стало $y + v\Delta\tau$. Конец сигнала приходит в моменты

$$t_A^{\text{кон}} = \Delta\tau + \frac{x - v\Delta\tau}{c}, \qquad t_B^{\text{кон}} = \Delta\tau + \frac{y + v\Delta\tau}{c}.$$

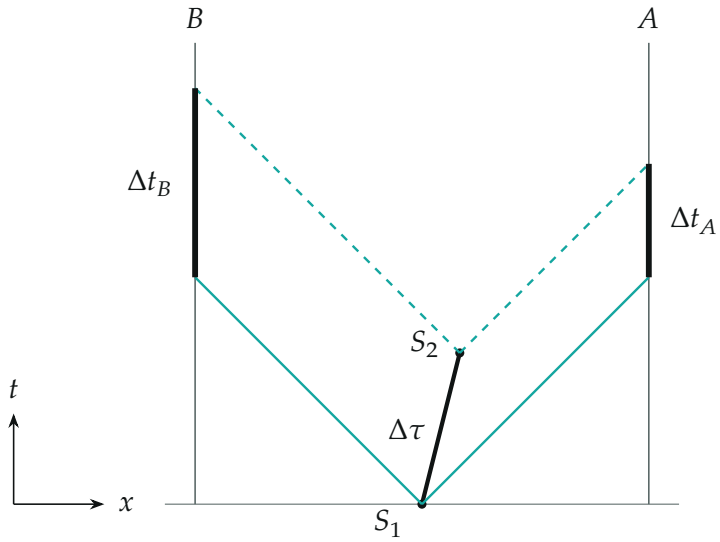


Диаграмма «координата — время» (скорость звука $c = 1$; для наглядности $v/c = 0{,}25$). Сплошные линии — звук начала сигнала, штриховые — звук конца сигнала; жирные отрезки на линиях датчиков — зарегистрированные длительности

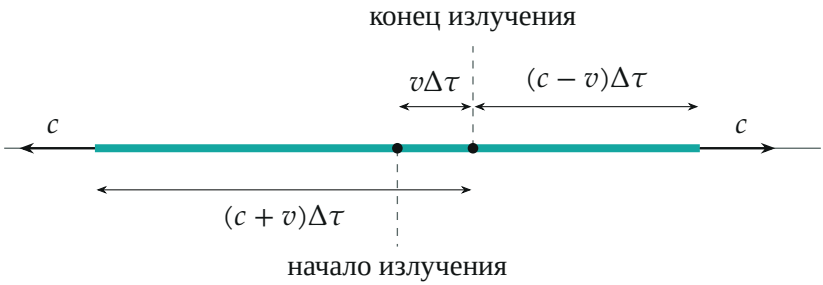
3. Длительность на каждом датчике — разность моментов прихода

конца и начала:

$$\Delta t_A = t_A^{\text{кон}} - t_A^{\text{нач}} = \Delta\tau + \frac{x - v\Delta\tau}{c} - \frac{x}{c} = \Delta\tau\Big(1 - \frac{v}{c}\Big),$$
$$\Delta t_B = t_B^{\text{кон}} - t_B^{\text{нач}} = \Delta\tau + \frac{y + v\Delta\tau}{c} - \frac{y}{c} = \Delta\tau\Big(1 + \frac{v}{c}\Big).$$

Расстояния x и y сократились: на длительность они не влияют.

Второй способ. Сигнал заканчивается, когда автомобиль в точке $v\Delta\tau$, а начало сигнала ушло на $c\Delta\tau$ в обе стороны. Впереди звуковой пакет занимает отрезок от автомобиля до фронта начала, длина $(c - v)\Delta\tau$; позади — от фронта начала до автомобиля, длина $(c + v)\Delta\tau$. Пакет проходит мимо неподвижного датчика со скоростью c, поэтому длительность равна длине, делённой на c: $\Delta t_A = (c - v)\Delta\tau/c$, $\Delta t_B = (c + v)\Delta\tau/c$ — те же формулы.



Состояние в момент конца излучения (для наглядности $v/c = 0{,}25$): звуковой пакет впереди автомобиля короче, позади — длиннее

4. Какой датчик что зарегистрировал. При $v > 0$ имеем $\Delta t_B > \Delta t_A$. Большую длительность $1{,}05\,\Delta t$ зарегистрировал датчик против хода, меньшую Δt — датчик по ходу:

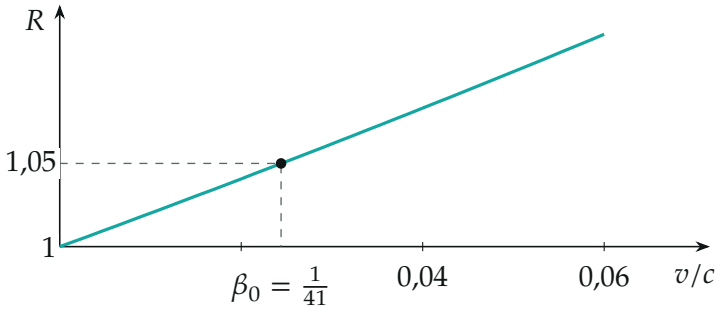
$$\Delta t_A = \Delta t, \qquad \Delta t_B = 1{,}05\,\Delta t.$$

Обратите внимание: ни один из датчиков не зарегистрировал длительность излучения $\Delta\tau$. Она лежит между ними и равна их среднему: из пункта 3 следует $\Delta t_A + \Delta t_B = 2\Delta\tau$, откуда $\Delta\tau = 1{,}025\,\Delta t$.

5. Скорость автомобиля. Разделим Δt_B на Δt_A: неизвестное $\Delta\tau$ сократится, остаётся только $\beta = v/c$:

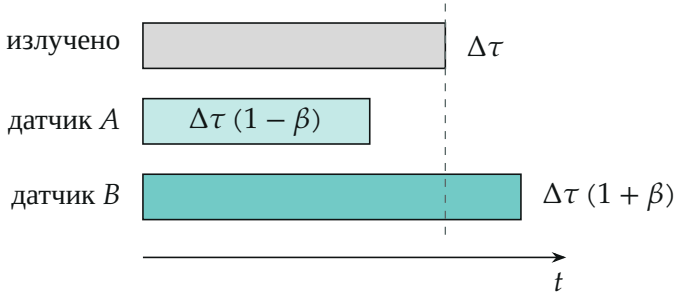
$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{1+\beta}{1-\beta} = 1{,}05 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1{,}05-1}{1{,}05+1} = \frac{0{,}05}{2{,}05} = \frac{1}{41},$$

$$v = \frac{c}{41} \approx 0{,}024\,c.$$



Отношение $R = \Delta t_B/\Delta t_A = (1+v/c)/(1-v/c)$ как функция v/c; значению 1,05 соответствует $v/c = 1/41$

Числовое значение скорости зависит от c, которое в условии не задано: при $c \approx 340$ м/с получаем $v \approx 8$ м/с. В ответах организаторов указано 7,2 м/с — это $0{,}024\,c$ при $c = 300$ м/с; точное значение $v = c/41$.



Длительность излучения $\Delta\tau$ и принятая датчиками: у A она в $1-\beta$ раз, у B в $1+\beta$ раз (для наглядности $\beta = 0{,}25$)

Проверка. Размерность: $\Delta t = \Delta\tau(1 \mp v/c)$ — время, v/c безразмерно. Предел: при $v \to 0$ оба датчика получают $\Delta\tau$, различия нет. Знак: впереди автомобиль догоняет собственный звук, и сигнал короче; позади — длиннее. Совпадает и с эффектом Доплера для частоты: за время излучения испускается $f_0\Delta\tau$ колебаний, датчик A принимает их с частотой $f_A = f_0/(1 - v/c)$ (источник приближается), поэтому

$$\Delta t_A = \frac{f_0\,\Delta\tau}{f_A} = \Delta\tau\Big(1 - \frac{v}{c}\Big),$$

как в пункте 3. Допущение «время у всех часов одно» оправдано: $v = c/41 \ll c$.

Физический смысл: по тому, насколько растянут или сжат сигнал, можно измерить скорость источника, не зная ни расстояния до него, ни длительности излучения.

Ответ. Датчик по ходу движения зарегистрировал Δt, датчик против хода — $1{,}05\,\Delta t$; $v = \dfrac{c}{41} \approx 0{,}024\,c$ (при $c \approx 340$ м/с — около 8 м/с).