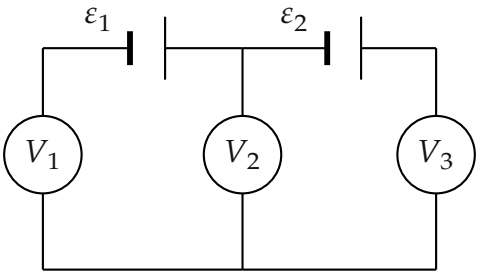
Два источника и три вольтметра

Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, собрана из двух разных источников и трёх одинаковых вольтметров. ЭДС правого источника известна и равна $\varepsilon_2 = 10$ В, правый вольтметр показывает напряжение $U_3 = 12$ В. Найти показания двух остальных вольтметров и ЭДС левого источника. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.



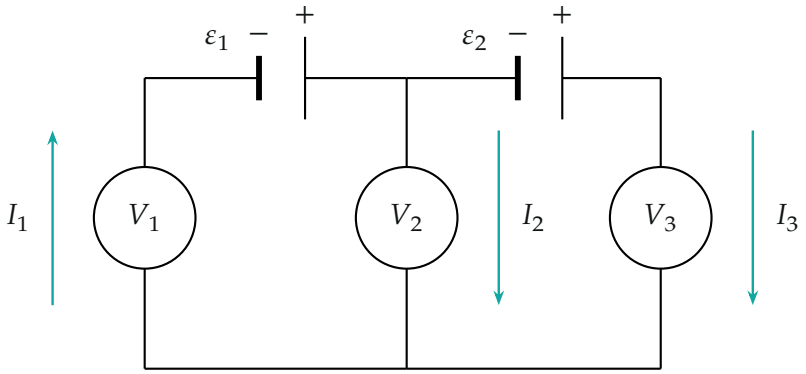
▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметры здесь не идеальные: через каждый течёт ток, и показание вольтметра пропорционально этому току, $U = IR$, причём сопротивление R у всех трёх одно и то же. Источники идеальные (внутреннего сопротивления нет), поэтому всё определяют два правила Кирхгофа: при обходе замкнутого контура сумма изменений потенциала равна нулю, а в узле токи складываются. Решаем по цепочке «контур — узел — контур»: правый контур даёт U_2, узел — U_1, левый контур — ε_1. Неизвестное R сократится: токи пропорциональны показаниям.

Обозначения. U_1, U_2, U_3 — показания вольтметров V_1, V_2, V_3; I_1, I_2, I_3 — токи через них; потенциал нижнего провода принят за нуль; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — потенциалы верхних выводов вольтметров. На рисунке у каждого источника длинная пластина (плюс) справа, поэтому при движении по верхнему проводу слева направо потенциал в источнике растёт на ε.

1. Направления токов. Идя по верхнему проводу от V_2 к V_3 через ε_2, потенциал растёт: $\varphi_3 = \varphi_2 + \varepsilon_2$. Показание V_3 — модуль φ_3, значит, $\varphi_3 = \pm 12$ В, и возможны два случая.

- $\varphi_3 = -12$ В. Тогда $\varphi_2 = -22$ В, токи через V_2 и V_3 текут вверх, к узлу, и весь суммарный ток уходит через ε_1 и V_1 вниз: $\varphi_1 = +34$ В, и $\varepsilon_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = -56$ В. ЭДС получилась отрицательной — источник стоял бы наоборот, а это противоречит рисунку. Случай невозможен.
- $\varphi_3 = +12$ В. Тогда $\varphi_2 = 12 - 10 = 2$ В. Токи через V_2 и V_3 текут вниз, к нижнему проводу, в верхнем узле они складываются и приходят через ε_1, а через V_1 ток идёт снизу вверх.

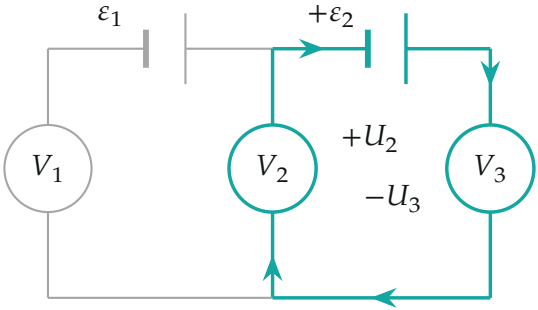
Так расставлены токи на рисунке.



Токи через вольтметры и полярность источников (длинная пластина — плюс)

2. Правый контур. Обойдём по часовой стрелке контур «верхний узел — ε_2 — V_3 — нижний провод — V_2 — верхний узел» и запишем правило Кирхгофа для контура: сумма изменений потенциала равна нулю. Контур выбран потому, что в него не входит неизвестная ε_1. Через источник от минуса к плюсу потенциал растёт на ε_2; вниз через V_3 по току он падает на U_3; вверх через V_2 против тока он растёт на U_2:

$$\varepsilon_2 - U_3 + U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_3 - \varepsilon_2 = 2 \text{ В}.$$



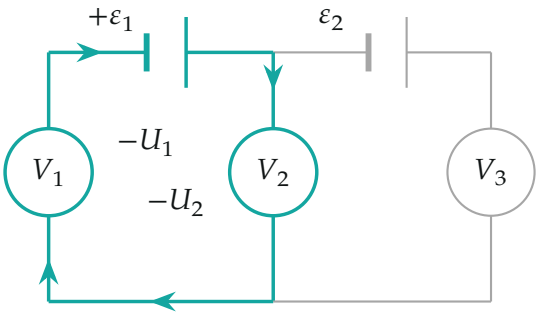
Правый контур: обход по часовой стрелке, подписаны изменения потенциала на каждом элементе

3. Верхний узел. Первое правило Кирхгофа для верхнего узла: $I_1 = I_2 + I_3$. Вольтметры одинаковы, $I = U/R$, поэтому равенство можно умножить на R и записать через показания:

$$U_1 = U_2 + U_3 = 2U_3 - \varepsilon_2 = 14 \text{ В}.$$

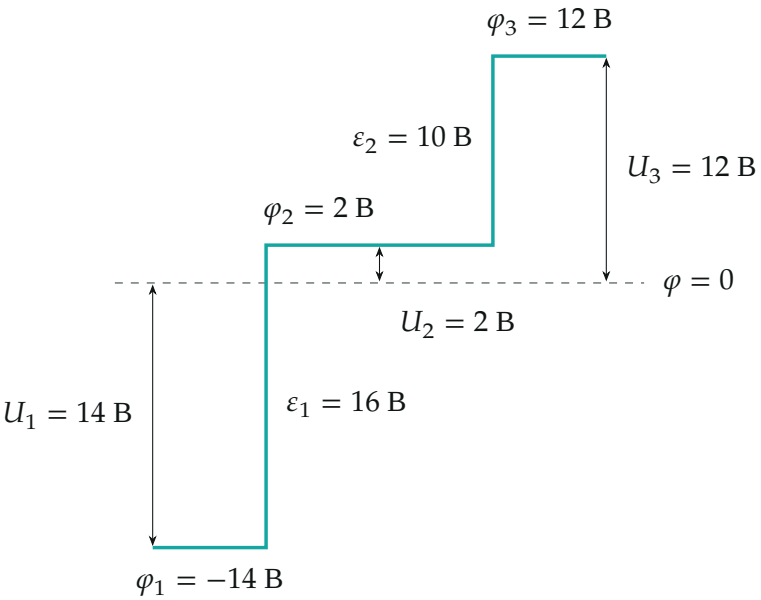
4. Левый контур. Обойдём по часовой стрелке «нижний провод — V_1 вверх — ε_1 — V_2 вниз — нижний провод»: вверх через V_1 по току потенциал падает на U_1, через ε_1 растёт на ε_1, вниз через V_2 по току падает на U_2:

$$\varepsilon_1 - U_1 - U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = U_1 + U_2 = 3U_3 - 2\varepsilon_2 = 16 \text{ В}.$$



Левый контур: обход по часовой стрелке

Второй способ — потенциалы. Те же числа видны, если проследить потенциал вдоль верхнего провода: на проводах он постоянен, а в источниках растёт скачком на ЭДС. Справа $\varphi_3 = 12$ В, после источника ε_2 против хода (справа налево) потенциал падает на 10 В: $\varphi_2 = 2$ В. Через узел и V_1 идёт суммарный ток, поэтому $\varphi_1 = -(U_2 + U_3) = -14$ В, и скачок на ε_1 равен $\varphi_2 - \varphi_1 = 16$ В.



Потенциал верхнего провода относительно нижнего (нулевая линия — нижний провод): скачки на источниках равны их ЭДС, расстояние от нулевой линии — показание вольтметра

Обратите внимание: формула $U_2 = U_3 - \varepsilon_2$ верна именно потому, что $U_3 > \varepsilon_2$ и ток в V_2 течёт вниз. При $U_3 < \varepsilon_2$ потенциал верхнего узла был бы отрицательным, ток в V_2 пошёл бы вверх, а показание было бы $\varepsilon_2 - U_3$.

Проверка. Энергетический баланс: мощность источников равна мощности, выделяемой в вольтметрах. Через ε_1 течёт I_1, через ε_2 — I_3:

$$\frac{\varepsilon_1 U_1 + \varepsilon_2 U_3}{R} = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}{R}.$$

Числа: $\varepsilon_1 U_1 + \varepsilon_2 U_3 = 16 \cdot 14 + 10 \cdot 12 = 344$ и $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 196 + 4 + 144 = 344$. Равенство выполнено, значит, и показания, и ЭДС согласованы. Предельный случай: при $U_3 = \varepsilon_2$ ток через V_2 исчезает ($U_2 = 0$), $U_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = 3U_3 - 2\varepsilon_2 = \varepsilon_2$: источники и два вольтметра образуют одну последовательную цепь, где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = U_1 + U_3$, всё сходится. Размерность: все величины — напряжения.

Физический смысл: показание V_1 равно сумме показаний V_2 и V_3, потому что ток первого вольтметра делится между двумя другими; ЭДС левого источника тратится на V_1 и V_2.

Ответ. $U_1 = 14$ В, $U_2 = 2$ В, $\varepsilon_1 = 16$ В.