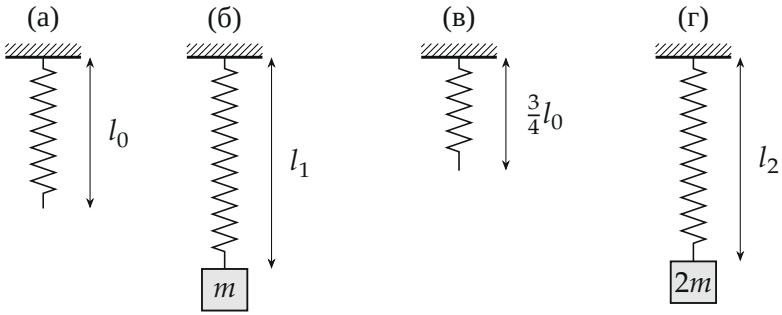
Жёсткость отрезанной пружины

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Лёгкую пружину подвесили за один конец к потолку. Если к свободному концу пружины прикрепить груз массой m, то её длина будет равна l_1. Если от пружины отрезать одну четверть, а к её оставшейся части прикрепить груз массой $2m$, её длина будет равна l_2. Найти коэффициент жёсткости первоначальной пружины.



Поясняющий рисунок: (а) целая пружина без груза; (б) с грузом m; (в) оставшиеся три четверти без груза; (г) они же с грузом $2m$. Длины нарисованы для примера

▲ **Решение.** **Что происходит.** Груз висит неподвижно, значит, сила упругости пружины уравновешивает силу тяжести: растяжение пружины равно весу груза, делённому на жёсткость. Это задача на равновесие, а хитрость в другом: у пружины, от которой отрезали часть, жёсткость *другая*, и надо понять, какая. Длина нерастянутой пружины l_0 в условии не дана, так что её придётся исключить: оба равновесия записываем одинаково и вычитаем.

Обозначения. k — жёсткость целой пружины, l_0 — её длина без нагрузки. У остатка длина без нагрузки $l_0' = \frac{3}{4}l_0$, жёсткость k_1. Ось y направим вниз, вдоль удлинения: тогда вес груза и растяжение пружины положительны. Пружина лёгкая, поэтому её натяжение одно во всех сечениях и равно силе, с которой пружина тянет груз.

1. Жёсткость остатка. Пружина однородна, поэтому её можно мысленно разделить на четыре одинаковых куска, соединённых последовательно. К каждому приложена одна и та же сила F (натяжение лёгкой пружины везде одинаково). Пусть целая пружина под действием силы F растягивается на x: $F = kx$. Растяжение складывается из растяжений четырёх одинаковых кусков, на каждый приходится $x/4$:

$$F = k_{\text{чет}} \cdot \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad k_{\text{чет}} = 4k.$$

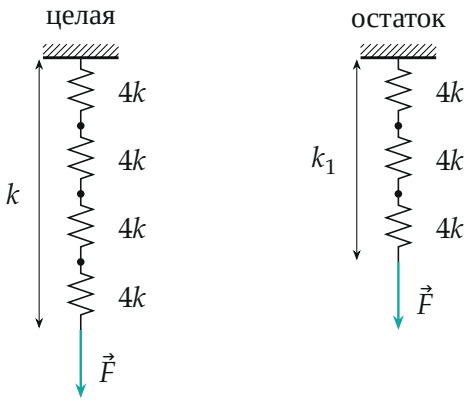
Оставшиеся три куска, соединённые последовательно, при той же силе растягиваются на $3x/4$, откуда

$$F = k_1 \cdot \frac{3x}{4} = kx \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{4k}{3}.$$

Жёсткость обратно пропорциональна длине пружины, а произведение жёсткости на длину нерастянутой пружины не меняется:

$$k_1 \cdot \tfrac{3}{4} l_0 = \tfrac{4k}{3} \cdot \tfrac{3}{4} l_0 = k\, l_0.$$

Эту постоянную величину мы сейчас используем.



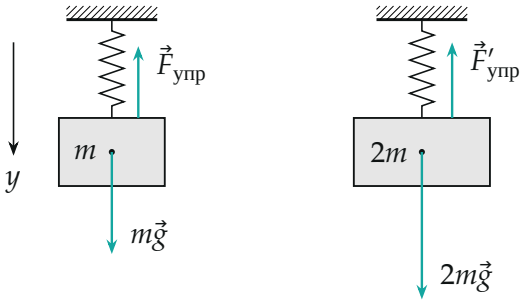
Целая пружина — четыре одинаковых куска жёсткостью $4k$ каждый; остаток — три таких куска подряд

2. Равновесие груза m. Второй закон Ньютона для груза m в проекции на ось y (вниз) при нулевом ускорении: вес вниз, сила упругости вверх. Растяжение целой пружины $l_1 - l_0$:

$$mg - k\,(l_1 - l_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\,(l_1 - l_0) = k\,l_1 - k\,l_0.$$

3. Равновесие груза $2m$ на остатке. Те же рассуждения для груза $2m$: жёсткость $\frac{4k}{3}$, растяжение $l_2 - \frac{3}{4}l_0$:

$$2mg = \frac{4k}{3}\Big(l_2 - \frac{3}{4}\,l_0\Big) = \frac{4k}{3}\,l_2 - k\,l_0.$$



Силы на грузы m и $2m$: сила упругости вверх уравновешивает вес; ось y направлена вниз

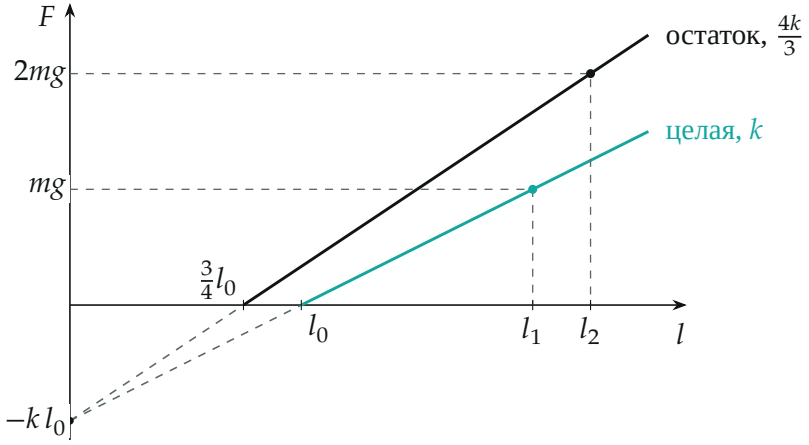
4. Исключаем l_0. Неизвестным осталось l_0, и в обоих равенствах оно стоит одним и тем же слагаемым $k\,l_0$ (так мы и записали пружину остатка). Вычтем первое равенство из второго:

$$2mg - mg = \frac{4k}{3}\,l_2 - k\,l_0 - k\,l_1 + k\,l_0 = k\Big(\frac{4}{3}\,l_2 - l_1\Big),$$
$$mg = \frac{k\,(4l_2 - 3l_1)}{3}.$$

Отсюда

$$k = \frac{3mg}{4l_2 - 3l_1}.$$

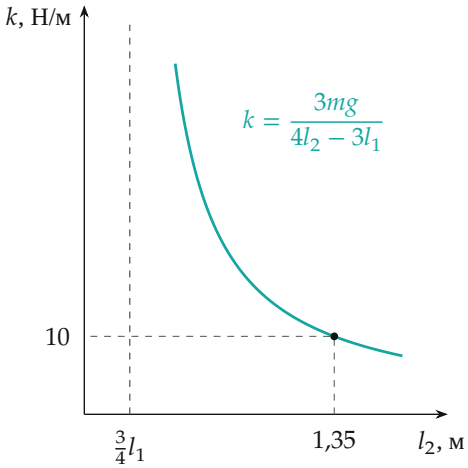
Второй способ — график. Построим силу упругости как функцию длины пружины: $F = k\,l - k\,l_0$ у целой пружины и $F = \frac{4k}{3}\,l - k\,l_0$ у остатка. Обе прямые при продолжении к $l = 0$ приходят в одну точку оси F, $F = -k\,l_0$: это и есть то, что $k\,l_0$ не меняется при отрезании. Груз m задаёт точку $(l_1;\, mg)$ на первой прямой, груз $2m$ — точку $(l_2;\, 2mg)$ на второй. Две прямые из одной точки оси: $k = \dfrac{mg + k\,l_0}{l_1}$ и $\dfrac{4k}{3} = \dfrac{2mg + k\,l_0}{l_2}$; исключая $k\,l_0$, получаем тот же ответ.



Сила упругости как функция длины. Пунктир — продолжение прямых назад до оси F: обе проходят через точку $-k\,l_0$. Числа для рисунка: $k = 10$ Н/м, $l_0 = 0{,}6$ м, $mg = 6$ Н

Обратите внимание: пружина, от которой отрезали четверть, не просто «короче на четверть» — она *жёстче* в $\frac{4}{3}$ раза. Если не учесть этого и взять прежнюю k, то длина l_0 не сократится, и найти k не удастся.

Проверка. Размерность: mg/l — ньютоны на метр, верно. Числа рисунка ($k = 10$ Н/м, $l_0 = 0{,}6$ м, $mg = 6$ Н) дают $l_1 = l_0 + mg/k = 1{,}2$ м и $l_2 = \frac{3}{4}l_0 + 2mg/\frac{4k}{3} = 0{,}45 + 0{,}9 = 1{,}35$ м, а формула возвращает $k = \dfrac{3 \cdot 6}{4 \cdot 1{,}35 - 3 \cdot 1{,}2} = 10$ Н/м. Условие $4l_2 > 3l_1$ — это положительность жёсткости; на рисунке оно значит, что прямая остатка круче прямой целой пружины.



Найденная жёсткость как функция l_2 при данных l_1 и mg (числа рисунка: $l_1 = 1{,}2$ м, $mg = 6$ Н, отмечена точка $l_2 = 1{,}35$ м, $k = 10$ Н/м): чем ближе $4l_2$ к $3l_1$, тем жёстче пружина; левее $\frac{3}{4}l_1$ решения нет

Физический смысл: груз вдвое тяжелее, но остаток жёстче в $\frac{4}{3}$ раза, поэтому растянется он лишь в $\frac{3}{2}$ раза сильнее целой пружины. Именно из сравнения двух растяжений без знания l_0 и находится жёсткость.

Ответ. $k = \dfrac{3mg}{4l_2 - 3l_1}$ (при $4l_2 > 3l_1$).