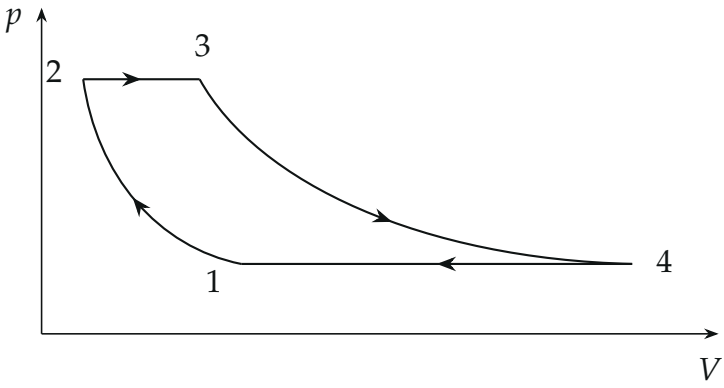
Цикл из двух изотерм и двух изобар

Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 4] С идеальным газом проводят циклический процесс 1-2-3-4-1, состоящий из двух изотерм (1-2 и 3-4) и двух изобар (2-3 и 4-1; см. рисунок). Известно, что отношение температур на изотермах 1-2 и 3-4 равно $T_{3\text{-}4}/T_{1\text{-}2} = 2$, а на участке изотермического расширения газ получал в 3 раза больше тепла, чем на участке изобарического нагревания 2-3. Найти КПД цикла.



▲ **Решение. Что происходит.** Это тепловая машина: за цикл газ берёт теплоту у нагревателя, часть превращает в работу, остальное отдаёт. КПД — отношение работы за цикл к теплоте, *полученной* газом: $\eta = A/Q_{\text{н}}$, и в $Q_{\text{н}}$ входят только те участки, где газ теплоту получает. Цикл идёт по часовой стрелке (расширение при большем давлении, сжатие при меньшем), поэтому $A > 0$. Главная идея: работа на двух изобарах сокращается, а работы на изотермах связаны простым отношением, которое даёт сразу всё.

Обозначения. ν — число молей газа; T — температура на изотерме 1-2, тогда на изотерме 3-4 она равна $2T$; $p_{\text{в}}$, $p_{\text{н}}$ — давления на верхней (2-3) и нижней (4-1) изобарах; V_i — объём в состоянии i; Q_{ij} и A_{ij} — теплота и работа газа на участке i-j (положительная теплота — газ получает). Теплоту на участке 2-3 обозначим Q, по условию $Q_{34} = 3Q$.

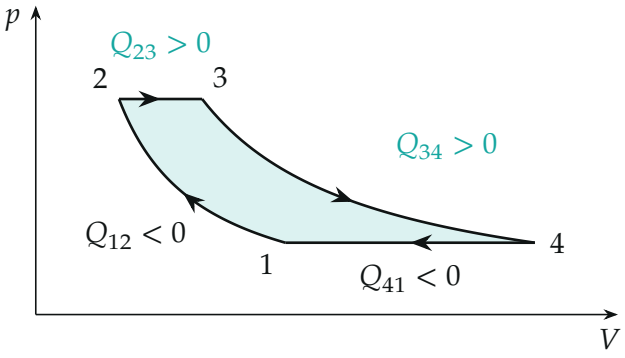
1. Где газ получает теплоту. Запишем первое начало термодинамики для каждого участка: $Q_{ij} = \Delta U_{ij} + A_{ij}$, и посмотрим на знаки ΔU (растёт с температурой) и A (растёт с объёмом).

- 2-3: изобарное нагревание от T до $2T$; $\Delta U > 0$ и объём растёт, $A > 0$, значит, $Q_{23} > 0$ — газ получает теплоту.
- 3-4: изотерма, $\Delta U = 0$, газ расширяется, $A > 0$, значит, $Q_{34} = A_{34} > 0$ — газ получает теплоту.
- 4-1: изобарное охлаждение от $2T$ до T; $\Delta U < 0$ и объём уменьшается, $A < 0$, значит, $Q_{41} < 0$ — газ отдаёт теплоту.
- 1-2: изотерма, $\Delta U = 0$, газ сжимается, $A < 0$, значит, $Q_{12} = A_{12} < 0$ — газ отдаёт теплоту.

Поэтому теплота, полученная от нагревателя за цикл,

$$Q_н = Q_{23} + Q_{34} = Q + 3Q = 4Q.$$

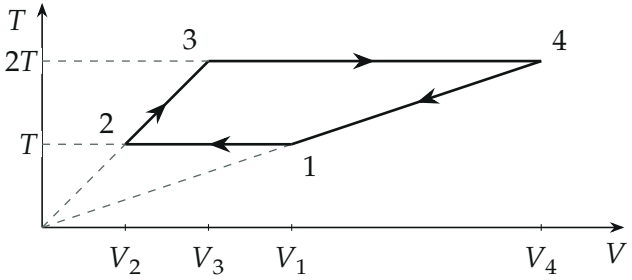
Обратите внимание: в $Q_н$ идут только положительные теплоты. Сумма всех четырёх теплот равна работе за цикл (за цикл $\Delta U = 0$) и в КПД не входит.



Знаки теплоты на участках цикла (бирюзовым — газ получает, чёрным — отдаёт); заливка — работа за цикл. Отношение давлений нарисовано для примера

2. Объёмы в углах цикла. Составим уравнение Менделеева — Клапейрона на каждой изобаре: $V = \dfrac{\nu R}{p} T$, то есть при постоянном давле-

нии объём пропорционален температуре. На изобаре 2-3 температура вдвое растёт, поэтому $V_3 = 2V_2$; на изобаре 4-1 вдвое падает, поэтому $V_4 = 2V_1$. В осях V, T цикл виден сразу: изотермы — горизонтали, изобары — лучи из начала координат (на каждой отношение V/T постоянно):



Цикл в осях V, T: $V_3 = 2V_2$, $V_4 = 2V_1$ (пунктир — продолжения изобар до начала координат). Для примера $V_1 = 3V_2$

3. Работа на изобарах. Работа газа при постоянном давлении $A = p\Delta V = \nu R\Delta T$; она зависит только от изменения температуры:

$$A_{23} = p_в(V_3 - V_2) = \nu R\,(2T - T) = \nu RT,$$
$$A_{41} = p_н(V_1 - V_4) = \nu R\,(T - 2T) = -\nu RT.$$

Работы на изобарах равны по модулю и противоположны по знаку: $A_{23} + A_{41} = 0$ (газ на 2-3 расширяется при большем давлении, на 4-1 сжимается при меньшем — но на столько же по температуре). Значит, работа за цикл складывается только из работ на изотермах:

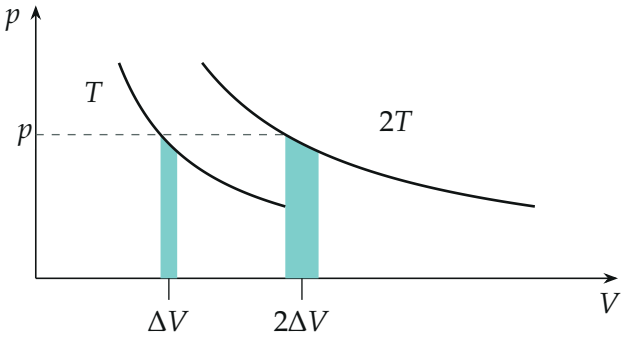
$$A = A_{34} + A_{12}.$$

4. Работа на изотермах. На изотерме $\Delta U = 0$, поэтому теплота равна работе: $A_{34} = Q_{34} = 3Q$. Теперь A_{12}. Работа газа — площадь под графиком $p(V)$; сравним изотермы 3-4 и 1-2. Возьмём любое давление p между $p_н$ и $p_в$ и на каждой из двух изотерм малый участок, где давление равно p. Из $pV = \nu RT$ объём на изотерме $2T$ при том же давлении вдвое больше, чем на изотерме T; поэтому и малое изменение объёма

там вдвое больше: $\Delta V_{34} = 2\,\Delta V_{12}$. Узкая полоска под графиком — работа $p\,\Delta V$ — на 3-4 вдвое больше, чем парная ей полоска на 1-2. Суммируя по всем парам полосок от $p_н$ до $p_в$:

$$|A_{12}| = \tfrac{1}{2}\,|A_{34}|, \qquad A_{12} = -\tfrac{1}{2}\cdot 3Q = -\tfrac{3}{2}\,Q.$$

Знак минус: газ сжимается, работа газа отрицательна.



При одном и том же давлении p полоска под изотермой $2T$ вдвое шире, чем под изотермой T, и работа $p\,\Delta V$ вдвое больше

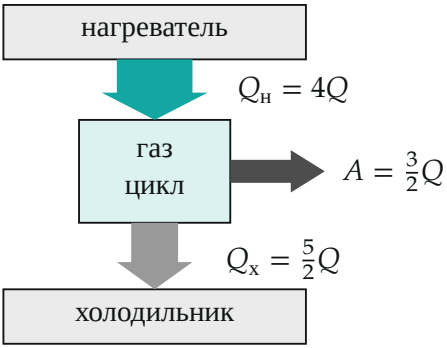
Тот же результат даёт формула работы на изотерме $A = \nu R T_{из} \ln \dfrac{V_{кон}}{V_{нач}}$:

$$A_{12} = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1} = -\nu R T \ln \frac{V_1}{V_2},$$
$$A_{34} = \nu R \cdot 2T \ln \frac{V_4}{V_3} = 2\nu R T \ln \frac{V_1}{V_2},$$

потому что $V_4/V_3 = 2V_1/(2V_2) = V_1/V_2$; отсюда снова $A_{12} = -\frac{1}{2}A_{34}$.

5. КПД. Работа за цикл и КПД:

$$A = A_{34} + A_{12} = 3Q - \frac{3}{2}\,Q = \frac{3}{2}\,Q > 0,$$
$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{3Q/2}{4Q} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$



Баланс энергии за цикл: из $4Q$ полученной теплоты в работу идёт $\frac{3}{2}Q$, остальные $\frac{5}{2}Q$ отдаются холодильнику. Ширина стрелок пропорциональна величинам

Проверка. Второй способ — через отданную теплоту. На изобаре 4-1 газ отдаёт $|Q_{41}| = Q$ (при охлаждении от $2T$ до T он теряет столько же, сколько получил при нагревании от T до $2T$ на 2-3: теплоёмкость и ΔT те же), на изотерме 1-2 отдаёт $|Q_{12}| = |A_{12}| = \frac{3}{2}Q$. Всего $Q_х = \frac{5}{2}Q$, и

$$\eta = 1 - \frac{Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{5Q/2}{4Q} = \frac{3}{8},$$

как и в пункте 5. Баланс: $Q_н - Q_х = 4Q - \frac{5}{2}Q = \frac{3}{2}Q = A$.

Предельный случай: КПД не может превысить КПД цикла Карно между температурами $2T$ и T, то есть $1 - T/(2T) = \frac{1}{2}$; наш $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$.

Ответ не зависит от газа: тип газа входит только в Q, а Q сократилось. Он определяет лишь отношение давлений: из $Q_{34} = 2\nu RT \ln \frac{p_в}{p_н} = 3Q$ и $Q = \frac{i+2}{2}\nu RT$ (i — число степеней свободы) получаем $\frac{p_в}{p_н} = e^{3(i+2)/4} \approx 43$ для одноатомного газа. Поэтому настоящий цикл сильно вытянут, а рисунки (условия и наши) нарисованы без масштаба.

Физический смысл: из каждых восьми джоулей теплоты, взятой у нагревателя, три превращаются в работу.

Ответ. $\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{3Q/2}{4Q} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$