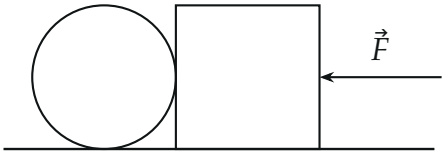
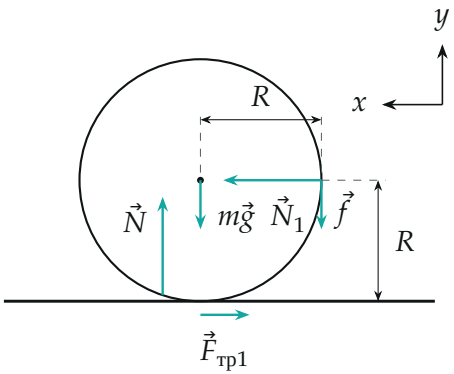
Цилиндр и куб на шероховатой плоскости

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 5] На шероховатой горизонтальной поверхности находятся цилиндр массой m и куб массой $2m$. Диаметр основания цилиндра равен стороне куба. Какой минимальной горизонтальной силой, проходящей через центры тел, нужно действовать на куб, чтобы при движении тел цилиндр не вращался? Коэффициенты трения между кубом и поверхностью, цилиндром и поверхностью, а также между цилиндром и кубом одинаковы и равны μ.



▲ **Решение. Что происходит.** Сила F прижимает куб к цилиндру, а куб толкает цилиндр, и оба тела скользят по полу с одним ускорением a. Цилиндр катиться не должен, значит, моменты сил относительно его оси компенсируются. Трение о пол в нижней точке вращает цилиндр в одну сторону, а вертикальное трение о куб — в другую: это возможно, потому что диаметр цилиндра равен стороне куба, и куб касается цилиндра на уровне оси. Трение о куб — трение покоя (в точке касания нет скольжения), оно ограничено μN_1. Чем больше F, тем сильнее куб давит на цилиндр и тем больше трения он способен создать; при слишком малой F трения не хватит и цилиндр начнёт вращаться. Нужно найти границу.

Обозначения. Ось x — по горизонтали влево (вдоль $\vec{F}$ и ускорения), ось y — вверх. N и $F_{\text{тр1}} = \mu N$ — сила реакции пола и сила трения скольжения пола, действующие на цилиндр; N_1 — сила, с которой куб давит на цилиндр; f — вертикальная сила трения куба о цилиндр; N_2 и $F_{\text{тр2}} = \mu N_2$ — реакция и трение пола для куба; R — радиус цилиндра (сторона куба $2R$).



Силы на цилиндр. Длины стрелок — для $\mu = 0{,}5$ в момент, когда $N_1 = N$: $N = 2mg$, $F_{тр1} = f = mg$, $N_1 = 2mg$

1. Силы на цилиндр. Цилиндр скользит по полу, поэтому трение пола — сила трения скольжения $F_{тр1} = \mu N$, направленная против движения, то есть вправо. Куб касается цилиндра в его крайней точке на высоте оси (центр цилиндра на высоте R, это же половина стороны куба). Поэтому $\vec{N}_1$ горизонтальна, проходит через ось и момента не создаёт, а сила трения f вертикальна и действует на расстоянии R от оси.

2. Цилиндр не вращается: сумма моментов относительно его оси равна нулю. Трение пола, приложенное в нижней точке, создаёт момент $F_{тр1}R$ (против часовой стрелки на рисунке), сила f создаёт момент fR в обратную сторону, если она направлена вниз. Остальные силы — $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{N}_1$ — проходят через ось и моментов не дают, поэтому

$$fR = F_{тр1}R \quad \Rightarrow \quad f = \mu N.$$

Здесь f определяется не законом Кулона — Амонтона, а условием $M = 0$.

3. Второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на вертикаль (ускорения по вертикали нет; сила f направлена вниз):

$$N - mg - f = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg + \mu N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{1-\mu}.$$

Куб, прижимая цилиндр к полу трением, увеличил реакцию пола. Для

существования такого равновесия нужно $\mu < 1$.

4. Второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на ось x:

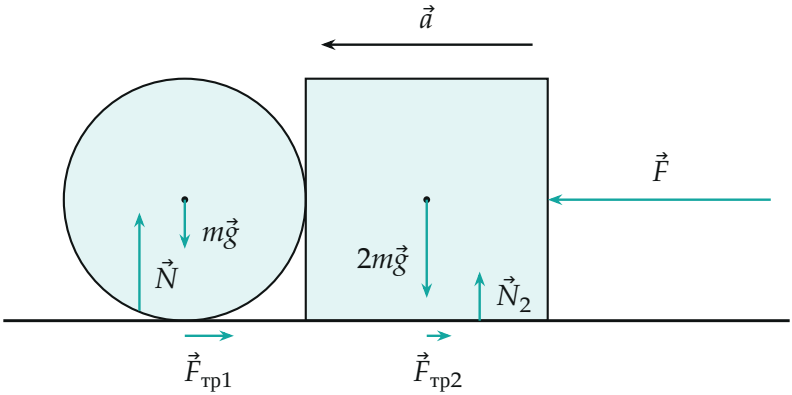
$$ma = N_1 - \mu N \quad \Rightarrow \quad N_1 = ma + \mu N.$$

5. Условие, что трения хватает. В точке касания цилиндр и куб движутся вместе (цилиндр не вращается), поэтому f — трение покоя, и $f \le \mu N_1$. Подставим $f = \mu N$:

$$\mu N \le \mu N_1 \quad \Rightarrow \quad N_1 \ge N \quad \Rightarrow \quad ma + \mu N \ge N,$$
$$ma \ge (1-\mu)N = mg \quad \Rightarrow \quad a \ge g.$$

Цилиндр не вращается только при ускорении не меньше g. Граница — $a = g$, на ней $N_1 = N$, и трение покоя достигло предела μN_1.

6. Сила для всей системы. Цилиндр и куб — одно тело массой $3m$: силы N_1, f и их реакции на куб взаимно сокращаются (третий закон Ньютона). Внешние силы показаны на рисунке.



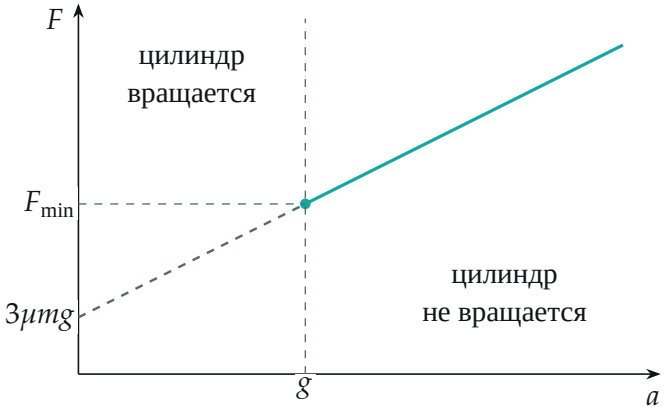
Цилиндр и куб как одно тело $3m$: показаны только внешние силы (N_1 и f — внутренние). Для $\mu = 0{,}5$, $a = g$

Вертикаль для системы: $N + N_2 = mg + 2mg = 3mg$ (по вертикали ускорения нет). Горизонталь, ось x влево:

$$F - F_{тр1} - F_{тр2} = 3ma \quad \Rightarrow \quad F = 3ma + \mu\,(N + N_2) = 3m\,(a + \mu g).$$

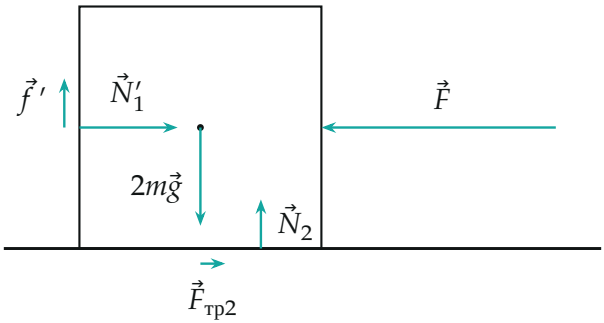
Сила растёт с ускорением, а ускорение по пункту 5 не меньше g; минимальная сила — при $a = g$:

$$F_{\min} = 3m\,(g + \mu g) = 3mg\,(1 + \mu).$$



$F = 3m(a+\mu g)$ при $\mu = 0{,}5$. Левее $a = g$ (пунктир) трения покоя не хватает и цилиндр вращается

Проверка по кубу отдельно. Силы на куб показаны на рисунке: на куб действуют $\vec{F}$, реакции $\vec{N}_1' = -\vec{N}_1$ и $\vec{f}\,' = -\vec{f}$ со стороны цилиндра, $2m\vec{g}$, $\vec{N}_2$ и трение пола μN_2.



Силы на куб ($\mu = 0{,}5, a = g$). Линия действия $\vec{N}_2$ смещена вправо от центра основания

Второй закон Ньютона для куба: по горизонтали $2ma = F - N_1 - \mu N_2$, по вертикали $N_2 = 2mg - f$ (сила f' направлена вверх). При $a = g$: $N_1 = N = \dfrac{mg}{1-\mu}$, $f = \mu N$, $N_2 = 2mg - \mu N$, откуда

$$F = 2mg + N + \mu\,(2mg - \mu N) = 2mg\,(1+\mu) + N\,(1-\mu^2)$$
$$= 2mg\,(1+\mu) + mg\,(1+\mu) = 3mg\,(1+\mu).$$

Тот же ответ.

Обратите внимание: трение покоя f не равно μN_1 при любой силе — оно определено моментами ($f = \mu N$) и лишь не должно превышать μN_1; равенство достигается именно на границе. Поэтому минимум силы — это граница по трению, а не «всё трение предельное» по умолчанию.

Второе замечание — о применимости. Ответ получен в предположении, что куб не опрокидывается и не отрывается от пола. Моменты сил, действующих на куб, приводят к тому, что линия действия $\vec{N}_2$ смещается от центра основания на $d = R \cdot \dfrac{\mu(3\mu-1)}{2-3\mu}$ (R — половина стороны куба; $d > 0$ — от цилиндра). Куб остаётся на полу, пока d не превышает половины стороны, то есть при $\mu \le \dfrac{\sqrt{7}-1}{3} \approx 0{,}55$; при $\mu \ge \dfrac{2}{3}$ реакция пола под кубом исчезает вовсе.



Смещение линии действия $\vec{N}_2$ от центра основания в долях половины стороны куба при минимальной силе. При $\mu \approx 0{,}55$ она доходит до края основания

Проверка. Размерность: $F \sim mg$ — сила. Числа для $\mu = 0{,}5$ (всё в единицах mg): $N = 2$, $F_{\text{тр1}} = f = 1$, $N_1 = 2$, $ma = N_1 - \mu N = 1$, то есть $a = g$; $N_2 = 2 - 1 = 1$, $F_{\text{тр2}} = 0{,}5$; для куба $2ma = F - N_1 - F_{\text{тр2}} = F - 2{,}5 = 2$, откуда $F = 4{,}5 = 3 \cdot 1{,}5$, как по формуле.

Предел: при $\mu \to 0$ формула теряет смысл — без трения цилиндр не вращается при любой силе, и сокращение на μ в пункте 5 при $\mu = 0$ недопустимо.

Физический смысл: чтобы цилиндр не вращался, куб должен гнать его с ускорением не меньше g, и для такого ускорения всей системы нужна сила $3m(g + \mu g)$.

Ответ. $F_{\min} = 3mg\,(1 + \mu)$ (при $\mu < 1$; при $\mu \gtrsim 0{,}55$ нужно ещё проверять, что куб не опрокидывается).