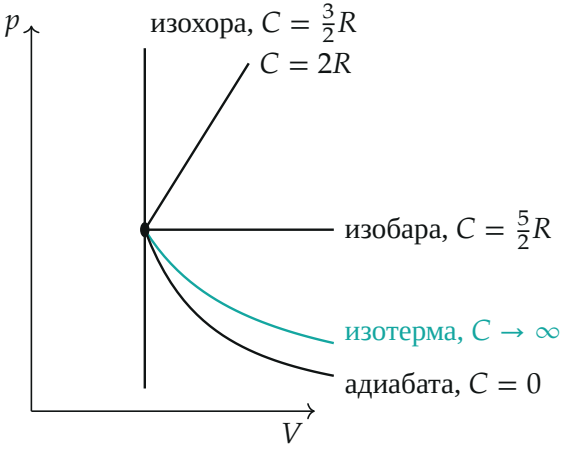
Процесс с постоянной теплоёмкостью

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 1] С двумя молями гелия проводят процесс, в котором его молярная теплоемкость не меняется и равна C. Известно, что гелий совершил в этом процессе работу A. Найти изменение температуры гелия в этом процессе.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Гелий переходит из начального состояния в конечное, а теплота, нужная на каждый градус изменения температуры, всё время одна и та же: молярная теплоёмкость C постоянна. Такие процессы называют политропными; изобара, изохора, изотерма и адиабата — их частные случаи (рисунок). Значит, теплота Q, работа A и изменение внутренней энергии ΔU связаны с одной величиной — изменением температуры ΔT. Ключевой закон — первое начало термодинамики для всего процесса: теплоту выражаем через C, энергию — через температуру, и в уравнении остаётся одно неизвестное ΔT.



Процессы с постоянной теплоёмкостью из одного состояния: при расширении (вправо) в каждом из них $A > 0$

Обозначения. $\nu = 2$ моль — число молей гелия; R — газовая постоянная; $\Delta T = T_к - T_н$ — искомое изменение температуры; Q — теплота, полученная гелием за весь процесс; ΔU — изменение его внутренней энергии; A — работа, совершённая гелием (по условию известна).

1. Теплота через C. По определению молярной теплоёмкости, на малом шаге процесса гелий получает $\delta Q = \nu C\, dT$. Теплоёмкость C не меняется, поэтому складываем такие вклады от начальной температуры до конечной:

$$Q = \nu C\, \Delta T.$$

Если $C\Delta T > 0$, гелий в итоге теплоту получает, если $C\Delta T < 0$ — отдаёт.

2. Внутренняя энергия. Гелий — одноатомный идеальный газ, его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}\nu RT$ зависит только от температуры. Поэтому в любом процессе, не только при постоянном объёме,

$$\Delta U = \frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T.$$

Обратите внимание: писать $\Delta U = \nu C\Delta T$ нельзя. Теплоёмкость C говорит о теплоте, а не об энергии; они совпадают только на изохоре, где $C = \frac{3}{2}R$ и работа равна нулю.

3. Первое начало термодинамики. Для гелия за весь процесс: полученная теплота идёт на изменение внутренней энергии и на работу газа,

$$Q = \Delta U + A.$$

Подставим Q и ΔU из пунктов 1 и 2:

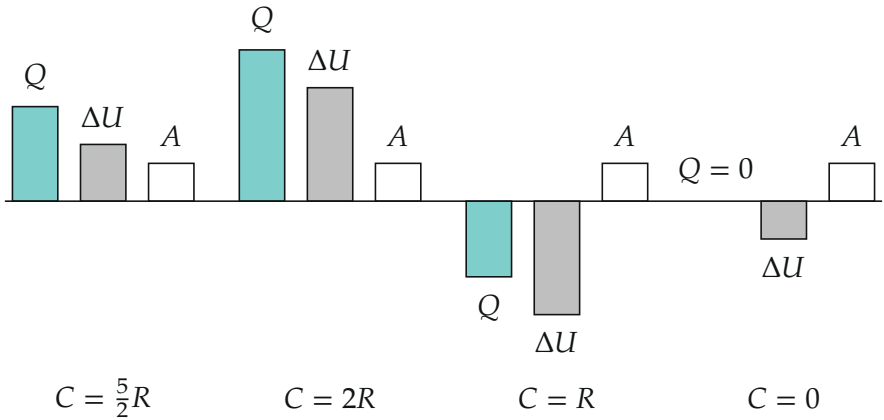
$$\nu C\,\Delta T = \frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T + A \quad \Rightarrow \quad \nu\left(C - \frac{3R}{2}\right)\Delta T = A.$$

Неизвестная ΔT осталась одна, поэтому

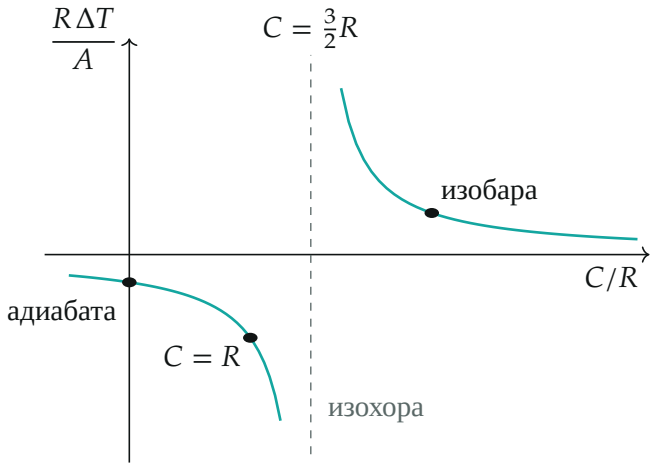
$$\Delta T = \frac{A}{\nu\left(C - \frac{3R}{2}\right)} = \frac{A}{2C - 3R} \qquad (\nu = 2 \text{ моль}).$$

Знак ответа. Знак ΔT определяет скобка $C - \frac{3}{2}R$. Если $C > \frac{3}{2}R$ (изобара $C = \frac{5}{2}R$, прямая $C = 2R$, изотерма в пределе), газ, расширяясь, нагревается: ΔT одного знака с A. Если $C < \frac{3}{2}R$ (адиабата, $C = 0$), расширяющийся газ остывает: $\Delta T < 0$ при $A > 0$. Рисунок со столбиками

показывает это: при $C = R$ теплота отрицательна — газ, совершая работу, ещё и отдаёт тепло. Значение $C = \frac{3}{2}R$ исключено: это изохора, на ней $A = 0$ и по заданной работе $A \neq 0$ температуру не найти. Условие $C > \frac{3}{2}R$ из официального решения не обязательно: формула верна и для $C < \frac{3}{2}R$.



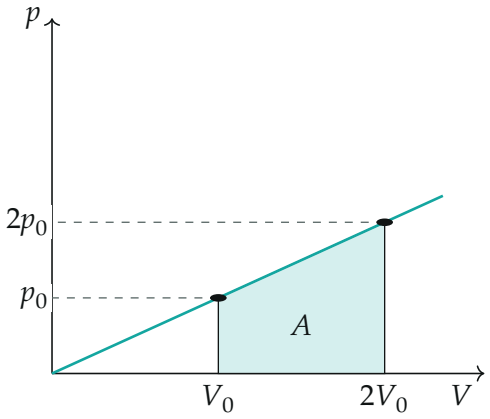
Как делится теплота Q при одной и той же работе A (принята за единицу): на ΔU и на A



Изменение температуры в единицах A/R в зависимости от C; штриховая прямая — изохора, где формула теряет смысл

Проверка. Размерность: $A/(\nu C)$ — джоуль, делённый на джоуль на кельвин, то есть кельвин. Предельные случаи. Изобара, $C = \frac{5}{2}R$: $\Delta T = A/(\nu R)$, и это верно, потому что $A = p\,\Delta V = \nu R\,\Delta T$. Адиабата, $C = 0$: $\Delta T = -\dfrac{2A}{3\nu R}$, то есть $\frac{3}{2}\nu R\,\Delta T = -A$, и энергия убывает ровно на работу. Изотерма, $C \to \infty$: $\Delta T \to 0$ при конечной A.

Второй способ, на примере $C = 2R$. Для политропного процесса $pV^n = \text{const}$ показатель $n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V}$; при $C = 2R$ получаем $n = \dfrac{2R - 5R/2}{2R - 3R/2} = -1$, то есть $p \propto V$: на графике $p(V)$ прямая через начало координат.



Процесс $p \propto V$ ($C = 2R$): площадь трапеции — работа A

Объём вырос вдвое, p тоже, значит pV и температура выросли в четыре раза: $\Delta T = 3T_0$ и $\nu R T_0 = p_0 V_0$. Работа — площадь трапеции: $A = \frac{1}{2}(p_0 + 2p_0)\,V_0 = \frac{3}{2}\,p_0 V_0$. Тогда $\Delta T = \dfrac{3p_0V_0}{\nu R} = \dfrac{3p_0V_0}{2R}$, а формула даёт $\dfrac{A}{2C - 3R} = \dfrac{(3/2)\,p_0V_0}{R}$ — то же число.

Смысл: при постоянной C теплота пропорциональна ΔT, поэтому $A = \nu\,(C - C_V)\,\Delta T$, где $C_V = \frac{3}{2}R$: работа — та часть теплоты, что не ушла в нагрев.

Ответ. $\Delta T = \dfrac{A}{\nu\left(C - \frac{3R}{2}\right)} = \dfrac{A}{2C - 3R}$ при $\nu = 2$ моль, $C \neq \frac{3}{2}R$.