Стержень с шариками налетает на покоящиеся

Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 2] К концам невесомого стержня длиной l прикреплены два маленьких шарика с массами m и $2m$. Стержень, двигаясь поступательно в направлении перпендикулярном ему самому со скоростью v, налетает на два точно таких же покоящихся тела, находящихся на расстоянии l друг от друга (см. рисунок). Одновременно происходят два центральных абсолютно неупругих столкновения. Найти силу натяжения стержня сразу после этого. Силу тяжести не учитывать.

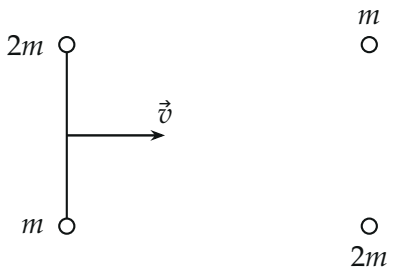


Рисунок условия: стержень со скоростью $\vec{v}$ и два покоящихся шарика

▲ **Решение.** **Что происходит.** Каждый конец стержня ударяется о покоящийся шарик, и шарики слипаются парами: сверху $2m$ налетает на m, снизу m налетает на $2m$. Массы в парах разные, поэтому скорости пар после удара получаются разными, и стержень перестаёт двигаться поступательно: он начинает вращаться вокруг своего центра масс. Для кругового движения нужна центростремительная сила, и её даёт натяжение стержня. Ключевые шаги: закон сохранения импульса для каждой пары при ударе, переход в систему отсчёта центра масс, второй закон Ньютона для кругового движения. Это задача класса «неупругий удар, затем вращение»: сначала считаем скорости сразу после удара, потом — силы.

Обозначения. Ось x — по скорости $\vec{v}$. u_1 и u_2 — скорости верхней и нижней пар сразу после удара; V_c — скорость центра масс; T — сила натяжения стержня.

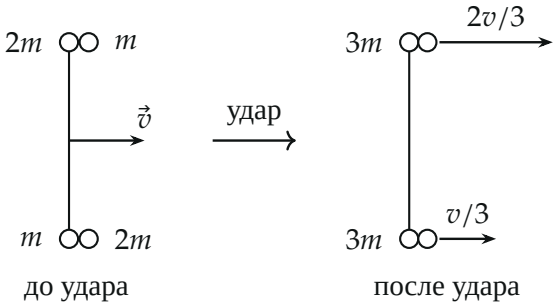
1. Скорости пар после удара. Запишем закон сохранения импульса для верхней пары (шарики $2m$ и m) за время удара в проекции на ось x: до удара движется только шарик $2m$,

$$2m\,v = (2m + m)\,u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{2v}{3}.$$

Для нижней пары (шарики m и $2m$) — так же:

$$m\,v = (m + 2m)\,u_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{v}{3}.$$

Обратите внимание: импульс сохраняется у каждой пары отдельно, а не только у всей системы. Стержень в момент удара перпендикулярен скорости, поэтому его сила на шарик направлена вдоль него — вертикально — и не меняет горизонтальный импульс шарика; ударная сила между шариками горизонтальна (удар центральный).



Стержень и шарики до и после удара: слипшиеся пары массой $3m$ имеют разные скорости

2. Скорость центра масс. После удара на концах стержня две одинаковые массы $3m$, центр масс C лежит посередине стержня, а его скорость

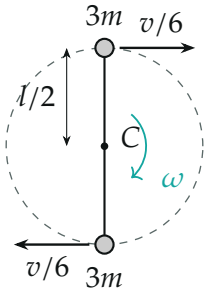
$$V_c = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{3} + \frac{v}{3}\right) = \frac{v}{2}.$$

Сверка: импульс всей системы до удара $3m\,v$ (двигался только стержень с шариками $m + 2m$), после удара $6m \cdot v/2 = 3m\,v$.

3. Система отсчёта центра масс. Сразу после удара внешних сил нет (тяжесть не учитываем), центр масс движется равномерно, и система отсчёта, связанная с ним, инерциальная. Выберем её: поступательная часть движения исчезает, остаётся чистое вращение вокруг C, а для него есть готовое уравнение. Скорости шариков относительно центра масс (рисунок):

$$u_{\text{верх}} = \frac{2v}{3} - \frac{v}{2} = \frac{v}{6}, \qquad u_{\text{нижн}} = \frac{v}{3} - \frac{v}{2} = -\frac{v}{6}.$$

Они равны по модулю и противоположны по направлению: стержень вращается вокруг центра C, а каждая пара движется по окружности радиуса $l/2$.



Движение в системе центра масс: стержень вращается по часовой стрелке, шарики идут по окружности радиуса $l/2$

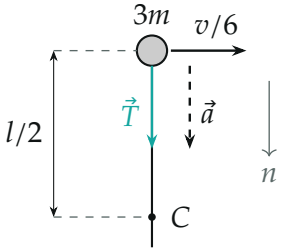


Скорости шариков после удара: поступательное движение со скоростью центра масс плюс вращение вокруг него

4. Натяжение из второго закона Ньютона. Рассмотрим верхнюю пару — тело массой $3m$, движущееся в системе центра масс по окружности радиуса $l/2$ со скоростью $v/6$. Сила, направленная к центру, одна — натяжение T вдоль стержня (рисунок). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось n, направленную к центру окружности, — на ней лежит и ускорение, и единственная сила:

$$3m\,\frac{(v/6)^2}{l/2} = T \quad\Rightarrow\quad T = \frac{3m\,v^2}{36}\cdot\frac{2}{l} = \frac{m\,v^2}{6\,l}.$$

Для нижней пары получается то же: стержень невесомый, натяжение на его концах одинаково. Знак: $T > 0$ — стержень растянут, пары стремятся разлететься.



Верхняя пара в системе центра масс: единственная сила $\vec{T}$ направлена к центру C вдоль стержня

Проверка. Размерность: mv^2/l — килограмм на метр в секунду во второй, делённый на метр, то есть ньютон. Второй способ: относительная скорость пар $u_1 - u_2 = v/3$, угловая скорость стержня $\omega = (u_1 - u_2)/l = v/(3l)$, центростремительное ускорение $a = \omega^2\,l/2 = \dfrac{v^2}{18\,l}$, и $T = 3m\,a = \dfrac{mv^2}{6l}$ — то же. Предел: если бы скорости пар были равны ($u_1 = u_2$), стержень двигался бы поступательно, $\omega = 0$ и $T = 0$; наша T растёт как квадрат разности скоростей $u_1 - u_2$.

Смысл: натяжение возникает только из-за разницы скоростей концов, а не из-за самой скорости v.

Ответ. $T = \dfrac{mv^2}{6\,l}$.