Диоды и два конденсатора

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Электрическая цепь составлена из источника ЭДС ε, двух диодов и двух первоначально незаряженных конденсаторов с емкостью C и $2C$ (см. рисунок). Ключ замыкают. Найти заряды конденсаторов q_C и q_{2C} после установления равновесия. Затем ключ размыкают, меняют полярность источника и снова замыкают ключ. Найти новые заряды конденсаторов q'_C и q'_{2C}. Диоды идеальны: их сопротивление электрическому току в направлении стрелки в обозначении диода на схеме равно нулю, в обратном направлении — бесконечности.

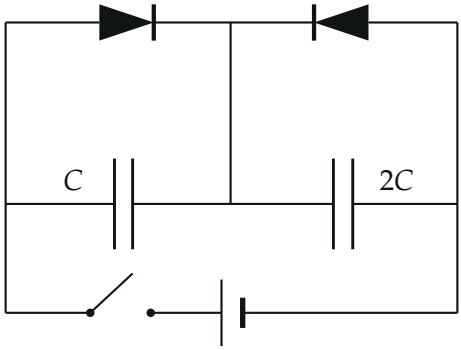


Рисунок условия: диод пропускает ток в сторону, куда направлен его треугольник

▲ **Решение.** **Что происходит.** Диод пропускает ток только по стрелке, поэтому заранее неизвестно, какие из диодов проводят. Это задача класса «перебор состояний диодов»: предполагаем состояние каждого диода, находим по этому предположению заряды и потенциалы, а потом проверяем, что знаки напряжений на диодах не противоречат предположению. Открытый диод — провод с нулевым напряжением, закрытый — разрыв цепи. Для конденсаторов работают два закона: напряжение на конденсаторе равно q/C, а заряд части цепи, отрезанной от источника и от открытых диодов, сохраняется.

Обозначения. L, M, R — левая шина, средний узел (между диодами и конденсаторами) и правая шина; φ_L, φ_M, φ_R — их потенциалы. Зарядом конденсатора будем называть заряд его обкладки, присоединённой

к узлу M (у C — правая обкладка, у $2C$ — левая); заряд другой обкладки противоположен. Сторону «плюса» источника определяет рисунок: длинная чёрточка условного знака батареи — «плюс».

Часть 1. Первое замыкание ключа.

1. Какие диоды проводят. Левая шина L через ключ присоединена к «плюсу» источника, правая R — к «минусу». Примем $\varphi_R = 0$, тогда $\varphi_L = \varepsilon$. Проверим предположение «оба диода закрыты»: цепь из двух последовательных конденсаторов C и $2C$ набрала бы одинаковые заряды

$$q = \varepsilon \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{2\varepsilon C}{3},$$

и на конденсаторе C было бы напряжение $2\varepsilon/3$, причём потенциал L выше потенциала M. Для левого диода это прямое направление (от L к M): он открылся бы. Предположение неверно. Значит, левый диод открыт: $\varphi_M = \varphi_L = \varepsilon$. Правый диод пропускает ток только от R к M, то есть при $\varphi_R > \varphi_M$; у нас $\varphi_R = 0 < \varepsilon$ — он закрыт. Предположение «левый открыт, правый закрыт» согласуется со знаками.

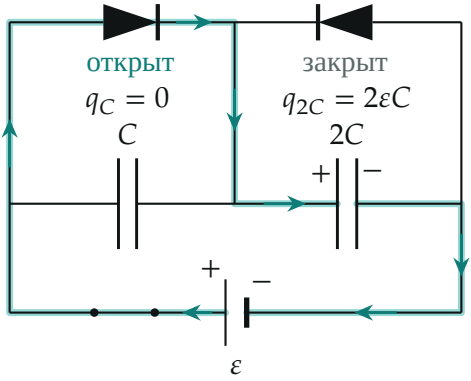
2. Заряды. Левый конденсатор присоединён параллельно открытому диоду: потенциалы его обкладок равны, напряжение нулевое,

$$q_C = C(\varphi_M - \varphi_L) = 0.$$

Всё напряжение источника приложено к конденсатору $2C$: $\varphi_M - \varphi_R = \varepsilon$, откуда

$$q_{2C} = 2C\,\varepsilon = 2\varepsilon C.$$

Обкладка, присоединённая к M, заряжена положительно: ток шёл от «плюса» через левый диод в узел M.



Первое замыкание: ток (стрелки) идёт через левый диод, конденсатор C им замкнут накоротко, $2C$ заряжается до ε

Часть 2. Ключ разомкнут, полярность изменена, ключ замкнут снова.

3. Что сохраняется. Пока ключ был разомкнут, заряды остались прежними: на обкладках узла M (правая обкладка C и левая $2C$) суммарный заряд

$$Q = 0 + 2\varepsilon C = 2\varepsilon C.$$

Если оба диода закрыты, узел M ни с источником, ни с шинами проводом не соединён, и его заряд Q сохраняется. Это работает только пока оба диода закрыты. Предположим, что оба диода закрыты, и проверим это в конце (пункт 5).

4. Заряды после установления. Обозначим x — заряд правой обкладки C (она на узле M). Тогда заряд левой обкладки $2C$ равен $2\varepsilon C - x$. Напряжения на конденсаторах:

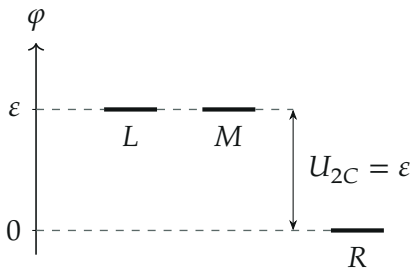
$$\varphi_M - \varphi_L = \frac{x}{C}, \qquad \varphi_M - \varphi_R = \frac{2\varepsilon C - x}{2C}.$$

Источник после смены полярности держит $\varphi_R - \varphi_L = \varepsilon$ (теперь к R присоединён «плюс»). Вычтем второе равенство из первого: $(\varphi_M - \varphi_L) - (\varphi_M - \varphi_R) = \varphi_R - \varphi_L$, то есть

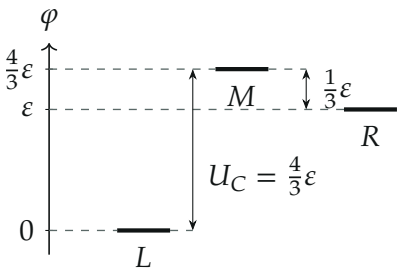
$$\frac{x}{C} - \frac{2\varepsilon C - x}{2C} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2x - 2\varepsilon C + x = 2\varepsilon C \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4\varepsilon C}{3}.$$

Тогда заряд обкладки $2C$ на узле M равен $2\varepsilon C - x = 2\varepsilon C/3$.

5. Проверка предположения о диодах. Напряжения: $\varphi_M - \varphi_L = x/C = 4\varepsilon/3 > 0$ — потенциал L ниже M, а левый диод пропускает ток от L к M (при $\varphi_L > \varphi_M$): он закрыт. $\varphi_M - \varphi_R = \varepsilon/3 > 0$ — потенциал R ниже M, а правый диод пропускает ток от R к M (при $\varphi_R > \varphi_M$): тоже закрыт. Предположение верно.

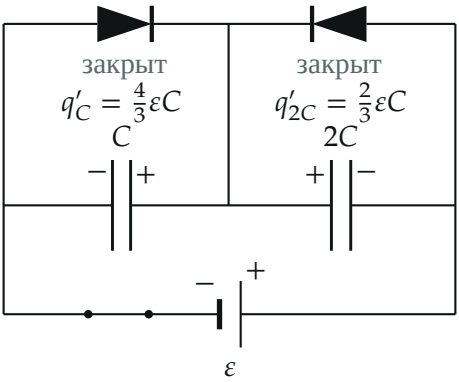


стадия 1: $U_C = 0$,
левый диод открыт



стадия 2: $U_{2C} = \frac{1}{3}\varepsilon$,
оба диода закрыты

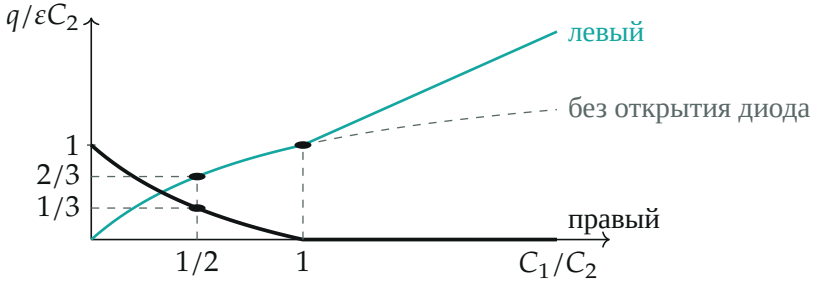
Потенциалы шин и узла M в двух состояниях; на втором рисунке потенциал M выше обоих, поэтому ни один диод не открыт



После второго замыкания: оба диода закрыты, заряды узла M перераспределились между конденсаторами

Обратите внимание: заряды после смены полярности нельзя находить по рассуждению «правый диод открывается, правый конденсатор разряжается через него»: диод $R \to M$ проводит только при $\varphi_R > \varphi_M$,

а здесь $\varphi_R < \varphi_M$ на $\varepsilon/3$. Правый диод открылся бы, если бы левый конденсатор был больше правого: обозначим их ёмкости C_1 и C_2. Те же рассуждения при закрытых диодах дают заряд левого конденсатора $2\varepsilon C_1 C_2/(C_1+C_2)$, и он превышает полный заряд узла εC_2 при $C_1 > C_2$: правая обкладка C_2 получила бы отрицательный заряд, то есть $\varphi_M < \varphi_R$ — правый диод открывается, пропускает заряд на узел M, и устанавливаются $\varphi_M = \varphi_R$, $q'_{C_1} = \varepsilon C_1$, $q'_{C_2} = 0$.



Заряды конденсаторов на узле M в единицах εC_2 в зависимости от C_1/C_2; у нас $C_1/C_2 = \frac{1}{2}$

Знаки зарядов обкладок. У конденсатора C левая обкладка заряжена отрицательно ($-\frac{4}{3}\varepsilon C$), правая — положительно; у $2C$ левая обкладка положительна ($+\frac{2}{3}\varepsilon C$), правая — отрицательна.

Проверка. Размерность: εC — вольт на фараду, то есть кулон. Сохранение заряда: $\frac{4}{3}\varepsilon C + \frac{2}{3}\varepsilon C = 2\varepsilon C = Q$. Напряжения согласуются с источником: $4\varepsilon/3 - \varepsilon/3 = \varepsilon$ — обход контура $L \to M \to R$ даёт ЭДС. Предел $C_1 = C_2$: правый конденсатор разряжается ровно до нуля — граница, где правый диод вот-вот откроется (стык линий на графике).

Смысл: диоды пускают заряд в одну сторону. В первый раз открытый диод замкнул C, и всё напряжение досталось $2C$; во второй раз диоды заперли заряд узла M, и он поделился так, что напряжения сложились в ЭДС.

Ответ. $q_C = 0$, $q_{2C} = 2\varepsilon C$; $q'_C = \dfrac{4\varepsilon C}{3}$, $q'_{2C} = \dfrac{2\varepsilon C}{3}$ (заряды обкладок узла M; по модулю).