Колечко на спице Галилея

Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 4] (Г.Галилей «Беседы и математические доказательства двух новых наук», 1637 г.). Маленькое колечко движется по гладкой спице MN. Начало движения колечка — точка M — лежит на прямой AB, наклоненной под углом α к горизонту, конец — точка N — на горизонтали CD, на расстоянии l от точки O пересечения горизонтали CD с наклонной прямой AB. На каком расстоянии от точки O должна быть расположена точка M, чтобы время движения колечка от точки M до точки N было минимальным?

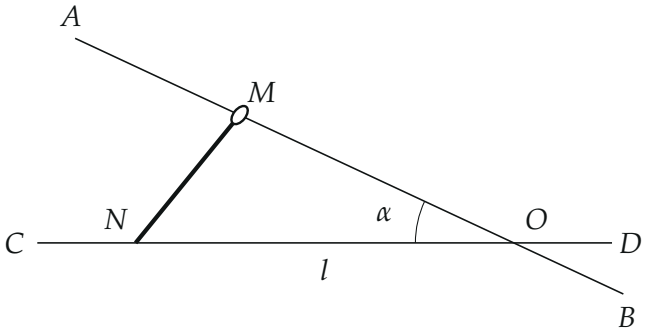
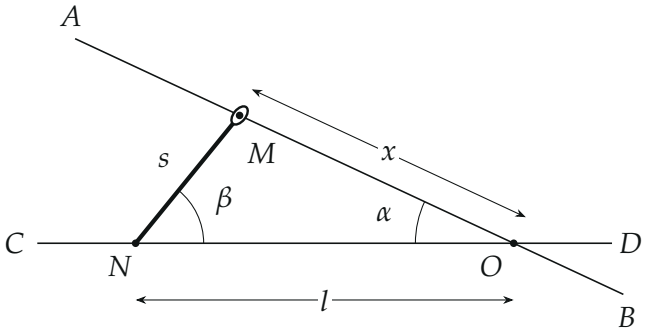


Рисунок условия: спица MN, начало движения M на прямой AB, конец N на горизонтали CD

▲ **Решение. Что происходит.** Колечко без начальной скорости скатывается по гладкой спице из точки M в точку N. Спица гладкая, поэтому движение равноускоренное, ускорение вдоль спицы равно $g\sin\beta$, где β — угол наклона спицы к горизонту. Когда точка M сдвигается по прямой AB, меняются и длина спицы, и её наклон: у далёкой точки спица длинная и пологая, у близкой — короткая и крутая, и время должно иметь минимум где-то посередине. Это задача класса «время скатывания по наклонной → минимум функции от x»: выразим квадрат времени через $x = MO$ и найдём минимум; для проверки найдём тот же ответ геометрически — по окружности Галилея.

Обозначения. $x = MO$ — искомое расстояние; $s = MN$ — длина спицы; $\beta = \angle MNO$ — угол наклона спицы к горизонту CD; t — время спуска. Колечко отпускают без начальной скорости (в условии это подразумевается).



Треугольник MON: стороны x, l и s; угол при O равен α, угол при N равен β

1. Геометрия треугольника MON. В треугольнике MON известны две стороны $MO = x$, $ON = l$ и угол между ними $\angle MON = \alpha$. По теореме косинусов длина спицы

$$s = \sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}.$$

Угол β при вершине N лежит против стороны $MO = x$, а угол α при вершине O — против стороны s. По теореме синусов $x/\sin\beta = s/\sin\alpha$, откуда

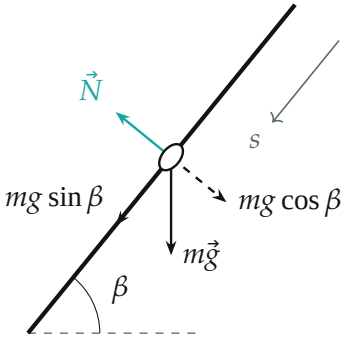
$$\sin\beta = \frac{x\sin\alpha}{s}.$$

Обратите внимание: ускорение определяет угол β спицы с горизонтом, а не угол α прямой AB; α постоянен, а β меняется вместе с x.

2. Ускорение колечка. Колечко — тело массой m с двумя силами: тяжесть $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ гладкой спицы, перпендикулярная ей (трения нет). Направим ось s вдоль спицы вниз, к точке N: сила $\vec{N}$ тогда перпендикулярна оси и в уравнение не войдёт. Второй закон Ньютона в проекции на ось s:

$$ma = mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\beta.$$

Ускорение постоянно, поэтому колечко движется равноускоренно из состояния покоя.



Колечко на спице: вдоль спицы действует составляющая тяжести $mg\sin\beta$

3. Время спуска. Путь s колечко проходит с постоянным ускорением $a = g\sin\beta$ без начальной скорости: $s = at^2/2$. Выразим время, подставив $\sin\beta = x\sin\alpha/s$:

$$t^2 = \frac{2s}{g\sin\beta} = \frac{2s^2}{g\,x\sin\alpha} = \frac{2\left(l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha\right)}{g\,x\sin\alpha}.$$

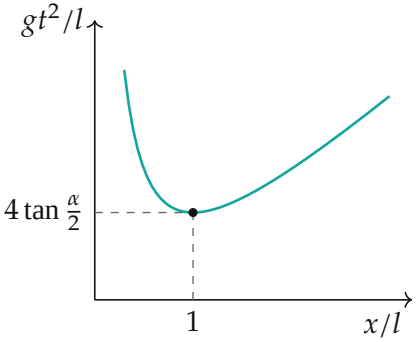
Неизвестная осталась одна — x, остальное постоянно: l, α, g.

4. Минимум времени. Время минимально там, где минимальна функция

$$f(x) = \frac{g\sin\alpha}{2}\,t^2 = \frac{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}{x} = \frac{l^2}{x} + x - 2l\cos\alpha.$$

Производная $f'(x) = 1 - l^2/x^2$ обращается в нуль при $x = l$ ($x > 0$); при $x < l$ она отрицательна (f убывает), при $x > l$ положительна (f растёт). Значит, $x = l$ — минимум.

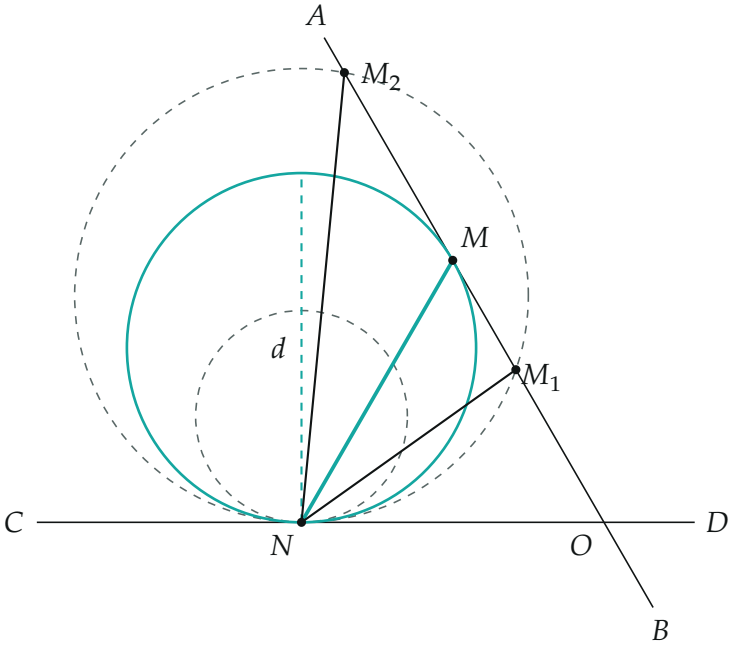
Тот же результат без производной: $f(x) = (x-l)^2/x + 2l\,(1 - \cos\alpha)$. Первое слагаемое неотрицательно и равно нулю только при $x = l$, второе от x не зависит.



Квадрат времени спуска в зависимости от x/l (для $\alpha = 60°$): единственный минимум при $x = l$

5. Минимальное время и вид спицы. При $x = l$ получаем $t^2 = 2 \cdot 2l\,(1 - \cos\alpha)/(g\sin\alpha) = (4l/g)\tan(\alpha/2)$. Треугольник MON при $x = l$ равнобедренный ($MO = ON$), его углы при M и N равны, поэтому $\beta = 90° - \alpha/2$.

6. Второй способ — окружность Галилея. Возьмём окружность с вертикальным диаметром d, касающуюся горизонтали CD в точке N. По хорде, ведущей из точки окружности в её нижнюю точку N, тело скатывается за одно и то же время $\sqrt{2d/g}$: длина хорды $d\sin\beta$, ускорение $g\sin\beta$, и $\sin\beta$ сокращается. Точка M должна лежать на прямой AB; значит, нужна самая маленькая окружность этого семейства, которая достаёт до AB, — та, что касается AB в точке M (меньшая не доставала бы, большая даёт две точки M_1 и M_2 с большим временем). Отрезки касательных из точки O равны: $OM = ON = l$. Радиус такой окружности $d/2 = l\tan(\alpha/2)$ (центр лежит на биссектрисе угла α), отсюда $t^2 = 2d/g = (4l/g)\tan(\alpha/2)$ — тот же результат.



Окружности с вертикальным диаметром, касающиеся горизонтали в N: наименьшая, достающая до AB, касается её в M ($OM = ON$); у большей две точки M_1 и M_2

Проверка. Размерность: $t^2 = 4l\tan(\alpha/2)/g$ — метр, делённый на метр на секунду в квадрате, то есть секунда в квадрате. Предел $\alpha = 90°$ (прямая AB вертикальна): M на высоте x над O, спица $s = \sqrt{l^2 + x^2}$, $\sin\beta = x/s$, и $t^2 = 2s^2/(g\,x)$ минимально при $x = l$, $t^2 = 4l/g$; формула даёт $4l\tan 45°/g = 4l/g$.

Смысл: самый быстрый путь получается, когда M и N равно удалены от O, то есть окружность с вертикальным диаметром, проходящая через M и N, касается обеих прямых.

Ответ. $MO = l$; при этом $t_{\min} = 2\sqrt{\dfrac{l\tan(\alpha/2)}{g}}$.