Нить наматывается на цилиндр

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 11 класс, задача 5] На поверхности стола расположен вертикальный цилиндр радиуса R, на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого равна l_0, привязано тело. Телу сообщают скорость v, направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает наматываться на цилиндр (см. рисунок, вид сверху). Найти время, за которое на цилиндр намотается одна пятая часть нити. Трение отсутствует.

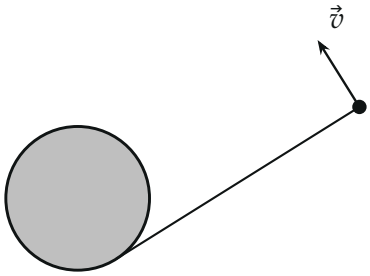
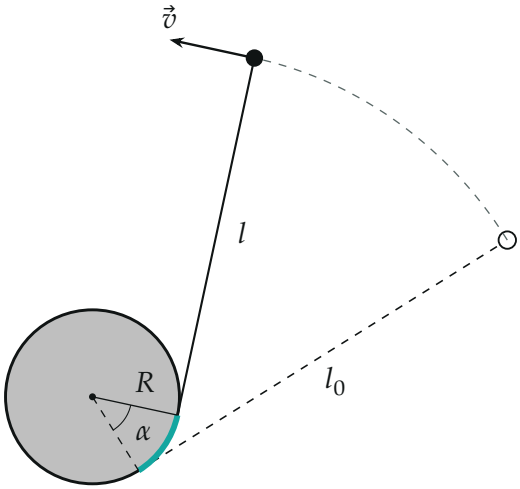


Рисунок условия (вид сверху): цилиндр, нить и тело со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной нити

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело движется по столу, нить тянет его к цилиндру и наматывается на него; свободная часть нити всё время укорачивается. Сила натяжения направлена вдоль нити, а скорость тела — перпендикулярно нити, поэтому натяжение не совершает работы и модуль скорости не меняется. Угловая скорость поворота нити при этом растёт: нить короче, а скорость та же. Главная идея: за малое время dt нить поворачивается на малый угол $d\alpha$ вокруг точки отхода от цилиндра, и тело проходит дугу радиуса, равного длине свободной части; сложив такие дуги, получим время как функцию угла. Класс задачи — движение по эвольвенте: длина свободной части линейно зависит от угла.

Обозначения. α — угол, на который повернулась нить с начала движения (угол между радиусами к начальной и текущей точкам касания); l — длина свободной части нити в этот момент; $t(\alpha)$ — время, за которое

нить повернулась на α. Длина всей нити не задана, поэтому «одна пятая часть нити» — одна пятая свободного куска l_0, то есть намотанная длина $l_0/5$ (так и в решении организаторов).



Произвольный момент: на цилиндр намотана дуга длиной $R\alpha$ (бирюзовая), свободная часть нити длиной l перпендикулярна скорости; штрих — траектория тела с начала движения

1. Скорость постоянна по модулю. Нить нерастяжима. За малое время dt точка, где нить отходит от цилиндра, сдвигается вдоль нити на $R\,d\alpha$, и свободная часть укорачивается ровно на столько же. Значит, скорость тела вдоль нити равна нулю: она перпендикулярна нити всё время. Сила натяжения направлена вдоль нити, то есть перпендикулярно скорости, работы не совершает, и по теореме о кинетической энергии $v = \text{const}$.

2. Длина свободной части. К моменту, когда нить повернулась на угол α, на цилиндр намотана дуга радиуса R и центрального угла α, то есть нить длиной $R\alpha$:

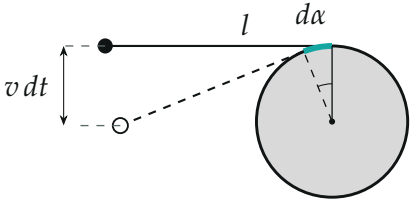
$$l = l_0 - R\alpha.$$

3. Малый поворот. Рассмотрим малый промежуток dt в произвольный момент. Нить за это время поворачивается вокруг точки отхода на

малый угол $d\alpha$, а тело движется по дуге окружности радиуса l (центр — точка отхода). Дуга и путь $v\,dt$ совпадают:

$$v\,dt = l\,d\alpha = (l_0 - R\alpha)\,d\alpha.$$

Здесь радиус l за время dt меняется на величину порядка $d\alpha$, и поправка второго порядка малости отброшена.



За малое время нить поворачивается на $d\alpha$ (штриховое положение): тело проходит путь $v\,dt \approx l\,d\alpha$

4. Время как функция угла. Сложим вклады всех малых шагов от начала движения ($\alpha = 0$, $t = 0$) до угла α:

$$v\,t = \int_0^{\alpha} (l_0 - R\alpha')\,d\alpha' = l_0\alpha - \frac{R\alpha^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t(\alpha) = \frac{l_0\alpha - R\alpha^2/2}{v}.$$

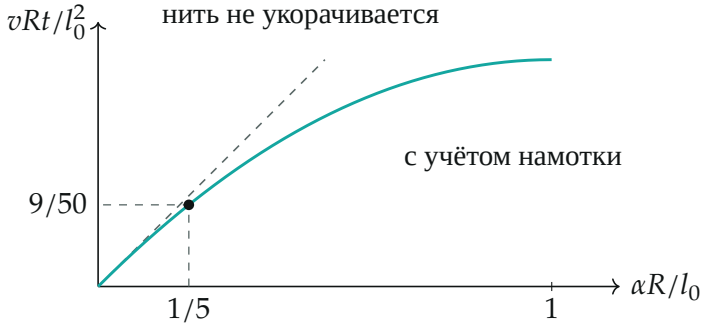
Слагаемое $-R\alpha^2/(2v)$ отрицательно: время меньше, чем $l_0\alpha/v$, потому что нить укорачивается.

5. Намотана пятая часть. Намотанная длина $R\alpha = l_0/5$, то есть

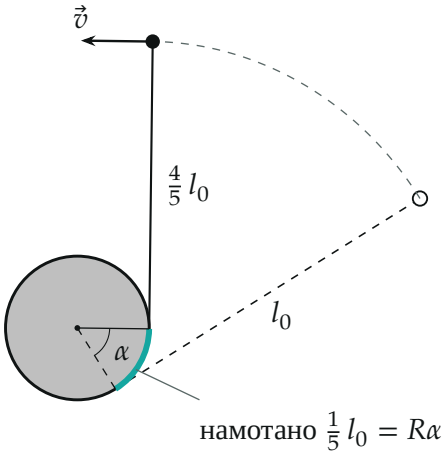
$$\alpha = \frac{l_0}{5R}.$$

Подставим в $t(\alpha)$:

$$\tau = \frac{1}{v}\left(l_0 \cdot \frac{l_0}{5R} - \frac{R}{2} \cdot \frac{l_0^2}{25R^2}\right) = \frac{l_0^2}{5vR} - \frac{l_0^2}{50vR} = \frac{9\,l_0^2}{50\,vR}.$$



Зависимость $t(\alpha)$ в безразмерных величинах; точка — намотана пятая часть



Момент τ (рисунок для $l_0 = 5R$, $\alpha = 1$ рад): намотана пятая часть l_0, свободная часть нити $\frac{4}{5}\,l_0$

Проверка. Размерность: $l_0^2/(vR)$ — метр, делённый на метр в секунду, то есть секунда. Второй способ: l убывает с α линейно, поэтому средняя длина свободной части — полусумма начальной и конечной, $\frac{9}{10}l_0$; путь тела $\frac{9}{10}l_0\,\alpha = \dfrac{9\,l_0^2}{50\,R}$, и τ — он, делённый на v: то же. Предел $R \to 0$: нить не наматывается, и $t(\alpha) = l_0\alpha/v$ — равномерное вращение по окружности радиуса l_0.

Ответ. $\tau = \dfrac{9\,l_0^2}{50\,v\,R}$.