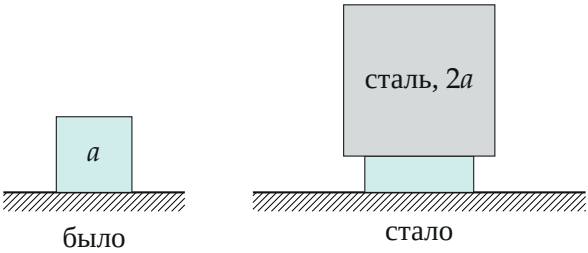
Пластилиновый куб под стальным

Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 7 класс, задача 2] На столе лежит сделанное из пластилина тело в форме куба. Давление тела на стол — $p = 100$ Па. Когда сверху на это тело положили стальной куб, ребро которого в $n = 2$ раза больше ребра пластилинового куба. Пластилин расплющился, и площадь его контакта со столом увеличилась вдвое. Чему стало равно давление на стол? Плотность пластилина — $\rho_0 = 1400$ кг/м^3, плотность стали — $\rho_1 = 7800$ кг/м^3.



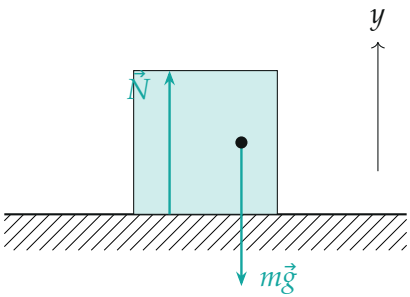
Поясняющий рисунок: пластилиновый куб с ребром a; потом сверху стальной куб с ребром $2a$, пластилин расплющен до площади $2S$

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на давление твёрдого тела. Давление на стол — сила, с которой тело давит на стол, делённая на площадь контакта. Сила выросла (добавился вес стального куба), площадь выросла вдвое. Неизвестны массы, но их отношение дают плотности и размеры кубов, а исходное давление p задаёт «масштаб».

Обозначения. a — ребро пластилинового куба, $S = a^2$ — площадь его грани; m — масса пластилина, M — масса стального куба (ребро $na = 2a$); p' — искомое давление. Ось y — вертикально вверх.

1. Сила давления в первом случае. Второй закон Ньютона для покоящегося пластилинового куба в проекции на ось y: $N - mg = 0$, где N — сила реакции стола. По третьему закону Ньютона куб давит на стол силой $N = mg$, поэтому

$$p = \frac{mg}{S}.$$

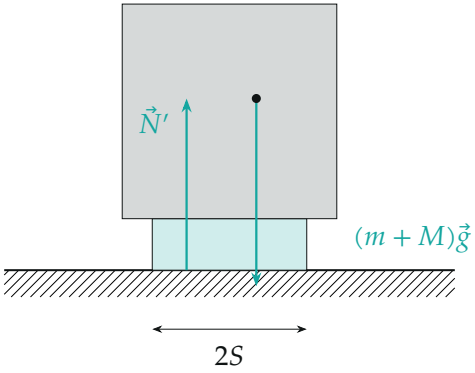


Пластилиновый куб: сила тяжести и сила реакции стола равны по модулю

2. Сила давления во втором случае. Теперь на стол давит система «пластилин + стальной куб». Второй закон Ньютона для неё в проекции на ось y: $N' - (m+M)g = 0$. Площадь контакта $2S$:

$$p' = \frac{(m+M)g}{2S} = \frac{mg}{2S}\left(1 + \frac{M}{m}\right) = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Выразили p' через данное p: масса пластилина и площадь грани поодиночке не нужны.

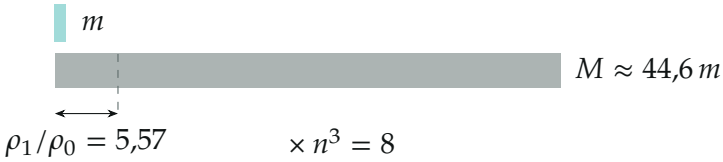


Система «пластилин + стальной куб»: стол держит её вес; площадь контакта $2S$

3. Отношение масс. Масса — плотность на объём; объём куба — ребро в кубе:

$$\frac{M}{m} = \frac{\rho_1 (na)^3}{\rho_0 a^3} = n^3 \frac{\rho_1}{\rho_0} = 8 \cdot \frac{7800}{1400} \approx 44{,}6.$$

Стальной куб тяжелее пластилинового в 44,6 раза: и плотность в 5,6 раза больше, и объём в 8 раз.



Массы кубов в масштабе: отношение плотностей 5,57, ещё в 8 раз больше объём стального куба

4. Ответ. Подставляем:

$$p' = \frac{p}{2}\left(1 + n^3\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = \frac{100}{2}\left(1 + \frac{8\cdot 7800}{1400}\right)\ \text{Па} \approx 2280\ \text{Па}.$$

Обратите внимание: площадь контакта со столом — у пластилина, а не у стального куба: на стол давит только пластилин, сталь давит на пластилин. Поэтому площадь $2S$, а не $(2a)^2 = 4S$.

Проверка. Размерность: p в паскалях, остальное безразмерно. Предел: если бы стальной куб был невесомым ($\rho_1 \to 0$), получилось бы $p' = p/2$ — тот же вес на вдвое большую площадь, верно. Физический смысл: вес вырос в 45,6 раза, площадь — в 2, давление выросло в 22,8 раза.

Ответ. $p' = \dfrac{p}{2}\left(1 + n^3\dfrac{\rho_1}{\rho_0}\right) \approx 2280$ Па.