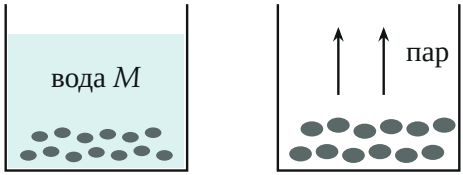
Перловка при варке

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 7 класс, задача 3] Перловую крупу массой $m = 1$ кг залили водой массой $M = 3$ кг и сварили. Известно, что плотность сухой перловки $\rho = 1400$ кг/м^3, вареной — $\rho_1 = 1200$ кг/м^3, воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Считая, что объем вареного зерна равен сумме объемов сухого зерна и впитавшейся в него воды, найти массу испарившейся при варке воды.



Поясняющий рисунок: часть воды впиталась в зёрна (они разбухли), остальная выкипела

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность смеси. Вода при варке делится на две части: одна впитывается в зерно, другая испаряется. Масса, которая впиталась, определяется плотностью вареного зерна: сухое зерно плотнее воды, и чем больше воды в нём, тем ближе его плотность к плотности воды. Условие даёт ещё одно правило — объёмы складываются. Из этого находим впитавшуюся воду, а испарилось всё остальное (в условии считается, что после варки свободной воды не осталось).

Обозначения. m_1 — масса впитавшейся воды, $V = m_1/\rho_0$ — её объём; ΔM — масса испарившейся воды.

1. Масса и объём вареного зерна. Масса складывается всегда: $m + m_1$. Объём по условию тоже складывается: $\dfrac{m}{\rho} + \dfrac{m_1}{\rho_0}$.



Вареное зерно: сухое зерно (серым) и впитавшаяся вода (бирюзой). Длины — для найденного ответа $m_1 = 0{,}714$ кг: объёмы в литрах ($0{,}714 + 0{,}714$), массы в килограммах ($1 + 0{,}714$)

2. Плотность вареного зерна. По определению плотности

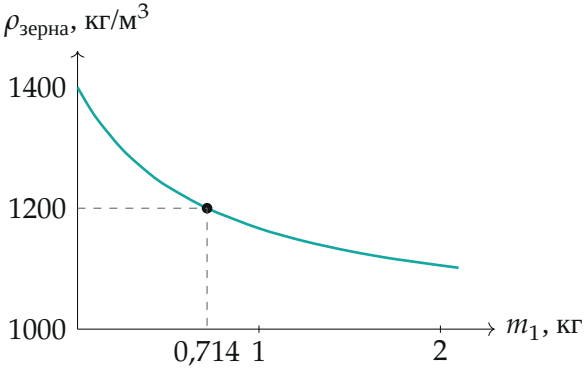
$$\rho_1 = \frac{m + m_1}{\dfrac{m}{\rho} + \dfrac{m_1}{\rho_0}}.$$

Одно уравнение, одно неизвестное m_1. Умножаем на знаменатель:

$$\frac{\rho_1}{\rho}\, m + \frac{\rho_1}{\rho_0}\, m_1 = m + m_1 \quad \Rightarrow \quad m_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right) = m\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right),$$

$$m_1 = m\,\frac{\rho_0(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_1 - \rho_0)} = 1 \text{ кг} \cdot \frac{1000 \cdot 200}{1400 \cdot 200} \approx 0{,}714 \text{ кг}.$$

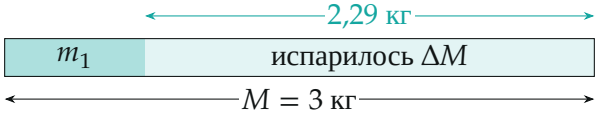
Знаки: $\rho > \rho_1 > \rho_0$, поэтому $m_1 > 0$ — вода действительно впиталась.



Плотность зерна в зависимости от массы впитавшейся воды (на 1 кг сухой крупы): от 1400 при сухом зерне вниз к 1000; плотность 1200 — при $m_1 = 0{,}714$ кг

3. Испарившаяся вода. Закон сохранения массы воды: $M = m_1 + \Delta M$, отсюда

$$\Delta M = M - m\,\frac{\rho_0(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_1 - \rho_0)} = 3 \text{ кг} - 0{,}714 \text{ кг} \approx 2{,}29 \text{ кг}.$$



Куда делась вода (в масштабе): впиталось 0,714 кг, испарилось 2,29 кг

Обратите внимание: массы складываются всегда, а объёмы — только потому, что так сказано в условии. Поэтому плотность вареного зерна — не среднее арифметическое ρ и ρ_0, а отношение суммарной массы к суммарному объёму.

Проверка. Подставим найденное: $\dfrac{1+0{,}714}{1/1400+0{,}714/1000} = \dfrac{1{,}714}{0{,}001428} \approx 1200$ кг/м^3 — совпадает с ρ_1. Предел: если бы $\rho_1 = \rho$, получилось бы $m_1 = 0$ — зерно не впитало воды; при $\rho_1 \to \rho_0$ $m_1 \to \infty$ — зерно почти целиком вода. Размерность: дробь плотностей безразмерна, ответ в килограммах.

Ответ. $\Delta M = M - m\dfrac{\rho_0(\rho-\rho_1)}{\rho(\rho_1-\rho_0)} \approx 2{,}29$ кг (впиталось $m_1 \approx 0{,}71$ кг).