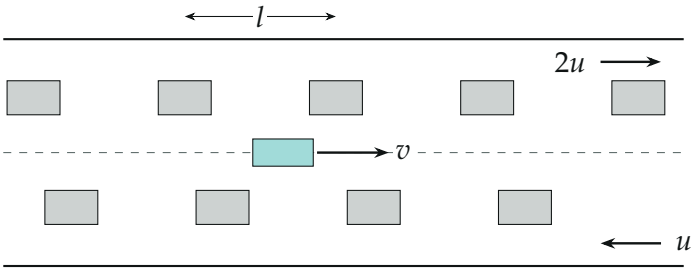
Две автомобильные пробки

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 7 класс, задача 5] На прямом шоссе в обоих направлениях медленно движутся две автомобильные пробки. Известно, что машины в одном направлении едут со скоростью вдвое большей, чем в другом. По разделительной полосе между двумя половинами шоссе едет автомобиль скорой помощи со скоростью v в том же направлении, что и более быстрая половина шоссе. Водитель скорой помощи заметил, что он обгоняет машины, движущиеся в том же направлении в $n = 6$ раз реже, чем встречается со встречными машинами. Найти скорости машин в пробке. Считать, что расстояние между всеми машинами в пробке одинаковое.



Поясняющий рисунок: сверху быстрая пробка ($2u$, в ту же сторону, что скорая), снизу медленная (u, навстречу); посередине — скорая со скоростью v; расстояние между машинами l

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение. Как часто скорая проезжает мимо машин, определяется её скоростью *относительно* колонны: относительно колонны машины стоят через l, а скорая едет мимо них со скоростью сближения. Попутных машин она обгоняет со скоростью $v - 2u$, встречных минует со скоростью $v + u$. Отношение частот — отношение этих скоростей.

Обозначения. u — скорость медленной пробки, $2u$ — быстрой; l — расстояние между соседними машинами; Δt_1 — время между двумя обгонами попутных машин, Δt_2 — между двумя встречами со встречными. Ось x — по ходу скорой. Скорая обгоняет попутные машины, значит, $v > 2u$.

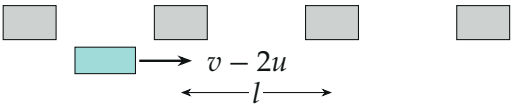
1. Попутная колонна. Перейдём в систему отсчёта быстрой колонны. По закону сложения скоростей скорость скорой в ней $v-2u$ (проекция на x), а машины колонны неподвижны и стоят через l. От одной машины до следующей скорая едет

$$\Delta t_1 = \frac{l}{v-2u}.$$

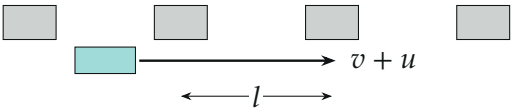
2. Встречная колонна. В системе отсчёта медленной колонны (она едет со скоростью $-u$) скорость скорой $v-(-u)=v+u$, машины стоят через l:

$$\Delta t_2 = \frac{l}{v+u}.$$

система быстрой колонны:



система медленной колонны:



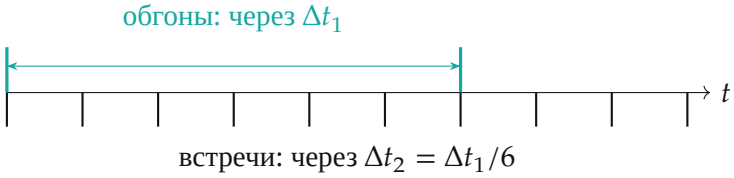
В системе каждой колонны её машины стоят через l, а скорая едет мимо них: медленно мимо попутных ($v-2u=\frac{3}{13}v$), быстро мимо встречных ($v+u=\frac{18}{13}v$). Длины стрелок — по ответу

3. Условие задачи. Обгоны в n раз реже встреч, то есть промежуток между обгонами в n раз длиннее:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{v+u}{v-2u} = n.$$

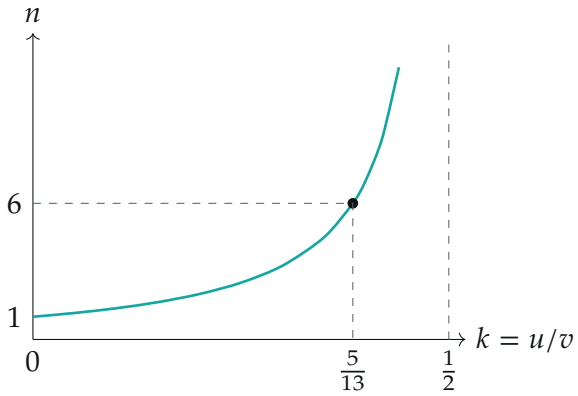
Расстояние l сократилось — оно одинаковое у обеих колонн, как сказано в условии. Неизвестное одно — u:

$$v+u = nv-2nu \quad \Rightarrow \quad u = \frac{(n-1)\,v}{2n+1} = \frac{5v}{13}, \qquad 2u = \frac{10v}{13}.$$



На оси времени: между двумя обгонами (бирюзой) проходит шесть встреч (чёрным)

4. Как отношение зависит от скорости пробки. Обозначим $k = u/v$; тогда $n = \dfrac{1+k}{1-2k}$. При $k \to 0$ (пробки стоят) $n \to 1$: машины стоят через одно расстояние, обгоны и встречи одинаково часты. При $k \to \frac{1}{2}$ быстрая колонна едет почти со скоростью скорой, обгоны редки, $n \to \infty$. Значение $n = 6$ получается при $k = 5/13$.



Во сколько раз обгоны реже встреч, в зависимости от u/v (по вычисленным точкам); асимптота $k = 1/2$ — быстрая колонна едет со скоростью скорой

Обратите внимание: у попутной колонны скорость сближения — разность $v - 2u$, у встречной — сумма $v + u$; встречная колонна едет медленнее, но мимо неё скорая проезжает быстрее. В исходном решении организаторов в знаменателе стояло $2n - 1$ — это опечатка, из уравнения следует $2n + 1$.

Проверка. При $u = \frac{5}{13}v$: $v + u = \frac{18}{13}v$, $v - 2u = \frac{3}{13}v$, отношение $18/3 = 6 = n$ — сходится; $2u = \frac{10}{13}v < v$, скорая действительно об-

гоняет. Размерность: u выражена через v безразмерным множителем. Предел $n = 1$ даёт $u = 0$ — обе пробки стоят, как и должно быть.

Ответ. Медленная половина пробки: $u = \dfrac{(n-1)v}{2n+1} = \dfrac{5v}{13}$; быстрая: $2u = \dfrac{10v}{13}$.