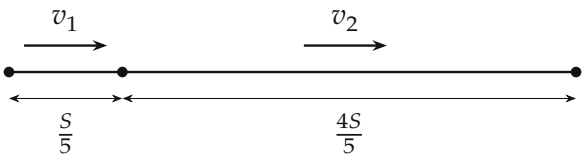
Средняя скорость автомобиля

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 8 класс, комплект 1, задача 1] Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшуюся часть — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.



Поясняющий рисунок: путь S в масштабе, первая пятая часть со скоростью v_1, остальное — со скоростью v_2

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль едет двумя равномерными участками разной длины. Средняя скорость по определению — весь путь, делённый на всё время. Это не среднее арифметическое скоростей: на каждом участке автомобиль провёл своё время, и «вес» каждой скорости — это время, а не путь. Главная идея — выразить время каждого участка через его длину и скорость. Класс задачи — средняя скорость при кусочно-равномерном движении.

Обозначения. S — весь путь; t_1, t_2 — времена на первом и втором участках; $t = t_1 + t_2$ — всё время; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость.

1. Время на каждом участке. На каждом участке движение равномерное, поэтому время — длина, делённая на скорость:

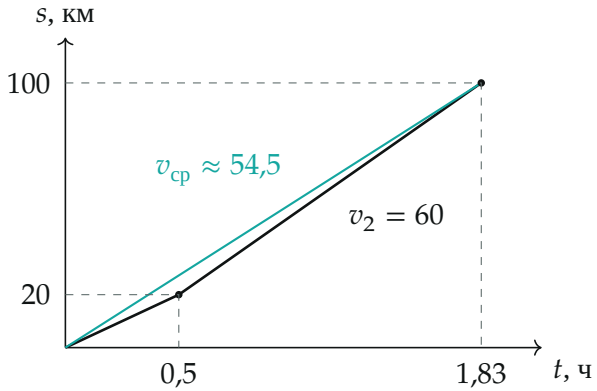
$$t_1 = \frac{S/5}{v_1} = \frac{S}{5v_1}, \qquad t_2 = \frac{4S/5}{v_2} = \frac{4S}{5v_2}.$$

Всё время

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{5}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{4}{v_2}\right) = \frac{S\,(v_2 + 4v_1)}{5v_1v_2}.$$

2. Средняя скорость. По определению $v_{ср} = \dfrac{S}{t}$; путь S сокращается:

$$v_{ср} = \frac{5v_1v_2}{v_2 + 4v_1} = \frac{5 \cdot 40 \cdot 60}{60 + 160}\ \text{км/ч} = \frac{12\,000}{220}\ \text{км/ч} \approx 54{,}5\ \text{км/ч}.$$

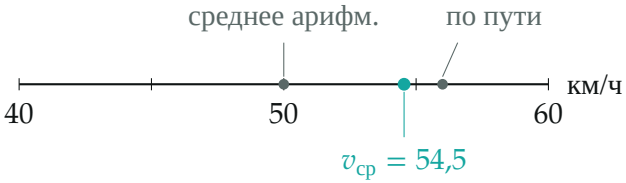


Путь от времени при $S = 100$ км в масштабе: ломаная — движение, бирюзовая хорда — средняя скорость (её наклон)

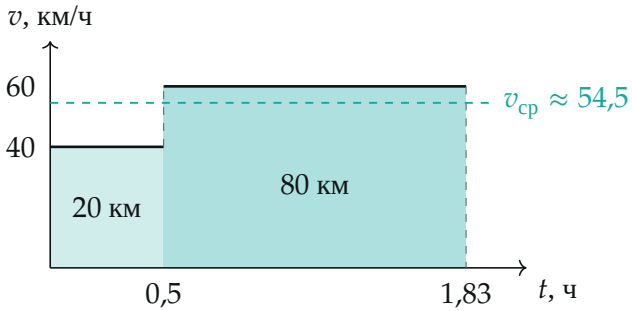
3. Второй способ — через «вес» времени. Возьмём для счёта $S = 100$ км: $t_1 = 20/40 = 0{,}5$ ч, $t_2 = 80/60 = 4/3$ ч $\approx 1{,}33$ ч, всего $11/6$ ч. Средняя скорость — среднее скоростей, взвешенное по времени:

$$v_{ср} = \frac{v_1t_1 + v_2t_2}{t_1 + t_2} = \frac{40 \cdot 0{,}5 + 60 \cdot \frac{4}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{100 \cdot 6}{11} \approx 54{,}5\ \text{км/ч}.$$

Со скоростью 60 км/ч автомобиль ехал почти в три раза дольше, чем со скоростью 40 км/ч, поэтому средняя ближе к 60.



Верная средняя скорость и два неверных «средних» на шкале скоростей



Скорость от времени: площади прямоугольников — пути участков; пунктир $v_{ср}$ — высота прямоугольника той же площади 100 км на том же времени

Обратите внимание: среднее арифметическое $(40 + 60)/2 = 50$ км/ч или «взвешенное по пути» $0{,}2 \cdot 40 + 0{,}8 \cdot 60 = 56$ км/ч — неверные ответы. Скорости усредняются по времени, а не по пути.

Проверка. Размерность: $v_1 v_2/(v_2 + 4v_1)$ — скорость. Пределы: при $v_1 = v_2 = v$ получаем $5v^2/(5v) = v$; ответ лежит между 40 и 60 км/ч. Численно второй способ дал то же число. Смысл: средняя скорость — наклон хорды графика пути от времени.

Ответ. $v_{ср} = \dfrac{5v_1 v_2}{v_2 + 4v_1} \approx 54{,}5$ км/ч.